Análise Matemática IV

Exercício Teste 8

1. Determine a única solução do problema de valor inicial

$$y' = \frac{y^2 - 1}{y(t-1)}. \qquad y(0) = 3 \tag{1}$$

para $t < 1$.

Resolução:

Trata-se de uma equação separável. De facto, para $t < 1$ (e $y > 1$) temos

$$\frac{y}{y^2 - 1} y' = \frac{1}{(t-1)}.$$

Integrando, obtemos sucessivamente (para $t < 1$ e $y > 1$)

$$\int_3^y \frac{\gamma}{\gamma^2 - 1}\, d\gamma = \int_0^t \frac{1}{\tau - 1}\, d\tau,$$

$$\frac{1}{2}\left(\log\left(y^2 - 1\right) - \log 8\right) = \left(\log(1-t) - \log 1\right),$$

$$\log\left(y^2 - 1\right) = \log 8 + 2\log(1-t),$$

$$y^2 - 1 = 8(1-t)^2.$$

Atendendo a que $y > 1 > 0$, solução é então

$$y(t) = \sqrt{1 + 8(1-t)^2} \quad \text{e} \quad \text{com } t \in \left]-\infty, 1\right[.$$

2. Mostre que existem inumeráveis soluções do problema

$$y(t-1)y' = y^2 - 1 \qquad y(0) = 3 \tag{2}$$

definidas na linha real $\mathbb{R}$.

Resolução:

Enquanto $t < 1$ o problema é equivalente ao da alínea anterior e a solução é a mesma da alínea anterior:

$$y(t) = \sqrt{1 + 8(1-t)^2} \quad \text{para } t \in \left]-\infty, 1\right[.$$

Donde

$$\lim_{t\to 1^-} y(t) = 1 \quad \text{e} \quad \lim_{t\to 1^+} y'(t) = \lim_{t\to 1^-} \frac{8(t-1)}{\sqrt{1+8(t-1)^2}} = 0.$$

Complementarmente, para $t > 1$ e $y \neq 1$ temos

$$\begin{aligned} y(t-1)y' = y^2 - 1 \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{y}{y^2-1}y' = \frac{1}{t-1} \\ &\Leftrightarrow \quad \frac{1}{2}\log\left|y^2-1\right| = \log(t-1) + c \\ &\Leftrightarrow \quad \left|y^2-1\right| = e^{2c}(t-1)^2 \\ &\Leftrightarrow \quad y^2 = 1 \pm e^{2c}(t-1)^2 . \end{aligned}$$

Atendendo ainda a que as funções constantes iguais a 1 e -1, respectivamente, são também solução da equação $y(t-1)y' = y^2 - 1$, obtemos a seguinte solução

$$y(t) = \pm\sqrt{1+K(t-1)^2}$$

com K um número real arbitrário. Para qualquer K temos

$$\lim_{t\to 1^+} y(t) = \pm 1 \quad \text{e} \quad \lim_{t\to 1^+} y'(t) = \lim_{t\to 1^+} \frac{\pm K(t-1)}{\sqrt{1+K(t-1)^2}} = 0.$$

Por outro lado para que $y(t) = \pm\sqrt{1+K(t-1)^2}$ esteja definida para todo $t > 1$, temos de ter $K \geqslant 0$ (para que se tenha sempre $1 + K(t-1)^2 > 0$). Concluímos então que qualquer das funções (uma para cada valor de K) definidas por

$$y(t) = \begin{cases} \sqrt{1+8(1-t)^2} & \text{se} \quad t \leqslant 1 \\ \\ \sqrt{1+K(t-1)^2} & \text{se} \quad t \geqslant 1 \end{cases},$$

com $K \geqslant 0$, são soluções (de classe C^1) do problema proposto. (Existem portanto tantas soluções do problema quantos os valores de K em $[0, +\infty[$; como o conjunto $[0, +\infty[$ não é numerável, existem inumeráveis soluções.)

3. Explique porque é que o problema (1) tem uma solução única e o problema (2) não tem uma solução única.

Resolução:

O primeiro problema é da forma

$$y' = f(t, y) \quad \text{e} \quad y(t_0) = y_0,$$

com $t_0 = 0$, $y_0 = 3$ e

$$f(t, y) = \frac{y^2-1}{y(t-1)}.$$

O domínio desta função é o conjunto aberto

$$D = \left\{ (t, y) \in \mathbb{R}^2 : t \neq 1 \quad \text{e} \quad y \neq 0 \right\}.$$

Neste domínio tanto $f(t, y)$ como $\dfrac{\partial f}{\partial y}(t, y)$ são funções contínuas. Estamos então nas condições do Teorema de Picard-Lindelöf e do teorema do prolongamento de soluções a um intervalos máximos de definição. A solução obtida $y(t) = \sqrt{1 + 8(1 - t)^2}$ é portanto única e o intervalo máximo de definição é $]-\infty, 1[$ uma vez que[1]

$$\lim_{t \to 1^-} y(t) = 1 \quad \text{e} \quad (1, 1) \in \partial D.$$

O segundo problema já não tem a forma indicada, pelo que é impossível aplicar os referidos teoremas. Por outro lado a resolução apresentada em **2.** demonstra a existência de infinitas soluções; estas soluções coincidem no intervalo $]-\infty, 1]$ e são distintas em todo o intervalo $]1, +\infty[$.

[1] Onde ∂D designa a fronteira de D, ou seja

$$\partial D = \left\{ (t, y) \in \mathbb{R}^2 : t = 1 \quad \text{ou} \quad y = 0 \right\}.$$