Análise Matemática IV

Exercício Teste 9

I. Considere o sistema de equações diferenciais lineares

$\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$, onde

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

1. Calcule os valores próprios e os espaços próprios do sistema.

2.a) Escreva uma expressão para a solução geral do sistema.

2.b) Determine a solução do sistema que satisfaz as condições iniciais

$$x_1(0) - 1 = x_2(0) - 2 = x_3(0) = 0.$$

3) Mostre que o subespaço de $\mathbb{R}^3$ definido por:

$$E = \left\{ v = \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix},\ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\}$$

é invariante para o sistema (i.e., $\forall x_0 \in E$, a solução do sistema com condição inicial x_0 verifica $x(t) \in E,\ \forall t \in \mathbb{R}$).

II. Considere o sistema de equações diferenciais $\mathbf{y}' = \mathbf{A}\mathbf{y} + \mathbf{h}(t)$, onde

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{h}(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ e^t \end{bmatrix}.$$

1. Determine a solução geral da sistema homogéneo associado.
2. Determine a solução da equação dada que passa pelo ponto $\mathbf{y}(0) = (1, 0, 0)^T$.