Análise Matemática IV

Teste 9- Resolução

I. Considere o sistema de equações diferenciais lineares

$\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$, onde

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

1. Calcule os valores próprios e os espaços próprios do sistema.

R: Os valores próprios são os zeros do polinómio característico, o qual é:

$$p(\lambda) = \lambda^2(3 - \lambda).$$

Portanto, os valores próprios são:

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 0$$

$$\lambda_3 = 3.$$

Para os espaços próprios correspondentes, tem-se: Espaço próprio associado ao valor próprio nulo:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \mathbf{0},$$

ou seja $v_3 = -v_1 - v_2$, pelo que se conclui que o espaço próprio em causa é:

$$E_0 = \left\{ \mathbf{v} = \left[\begin{smallmatrix} \alpha \\ \beta \\ -\alpha-\beta \end{smallmatrix} \right], \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \mathbf{v} = \alpha \left[\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{smallmatrix} \right] + \beta \left[\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{smallmatrix} \right] \ , \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\}.$$

Espaço próprio associado ao valor próprio $\lambda_3 = 3$:

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \mathbf{0},$$

ou seja, $v_1 = v_2 = v_3$, pelo que se conclui que o espaço próprio é:

$$E_3 = \left\{ \mathbf{v} = \alpha \left[\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{smallmatrix} \right], \forall \alpha \in \mathbb{R} \right\}.$$

2.a) Escreva uma expressão para a solução geral do sistema.

R: Atendendo ao resultado da alínea anterior conclui-se que a expressão geral da solução é dada por:

$$\mathbf{x}(t) = a_1 \left[\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{smallmatrix} \right] + a_2 \left[\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{smallmatrix} \right] + a_3 \left[\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{smallmatrix} \right] e^{3t}$$

onde a_1, a_2 e a_3 são constantes reais arbitrárias.

2.b) Determine a solução do sistema que satisfaz as condições iniciais

$$x_1(0) - 1 = x_2(0) - 2 = x_3(0) = 0.$$

R: Usando a expressão geral da alínea anterior e as condições iniciais $x_1(0) = 1, x_2(0) = 2, x_3(0) = 0$, tem-se:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} = a_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} + a_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} + a_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

ou seja $a_1 = 0, a_2 = a_3 = 1$, e portanto a solução procurada é

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{3t}.$$

3. Mostre que o subespaço de $\mathbb{R}^3$ definido por:

$$E = \left\{ v = \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\}$$

é invariante para o sistema (i.e., $\forall x_0 \in E$, a solução do sistema com condição inicial x_0 verifica $x(t) \in E, \quad \forall t \in \mathbb{R}$).

R: Considere-se uma condição inicial $\mathbf{x_0} \in E$. Então, para algum $(\alpha_0, \beta_0) \in \mathbb{R}^2$,

$$\mathbf{x}(t_0) = a_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} + a_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} + a_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{3t_0} = \alpha_0 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} + \beta_0 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \mathbf{x_0}.$$

Daqui conclui-se que $a_1 = \alpha_0, a_2 = 0, a_3 = \beta_0 e^{-3t_0}$. Então a solução verifica

$$\mathbf{x}(t; t_0, \mathbf{x_0}) = \alpha_0 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} + \beta_0 e^{3(t-t_0)} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \in E, \ \forall t \in \mathbb{R},$$

e portanto E é invariante para a equação.

II. Considere o sistema de equações diferenciais $\mathbf{y}' = \mathbf{A}\mathbf{y} + \mathbf{h}(t)$, onde

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{h}(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ e^t \end{bmatrix}.$$

1. Determine a solução geral da sistema homogéneo associado.

R: A solução geral do sistema pode ser obtida como combinação linear de três soluções linearmente independentes. Vamos portanto obter essas soluções (ou seja obter uma matriz fundamental para o sistema). Os valores próprios de $\mathbf{A}$ são os zeros do polinómio característico

$$p(\lambda) = \det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = -(\lambda - 1)^3.$$

Conclui-se daqui que $\lambda = 1$ (com multiplicidade algébrica igual a 3) é o único valor próprio de $\mathbf{A}$. O espaço próprio associado é constituído pelos vectores $\mathbf{v}$ que são solução de:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \mathbf{0},$$

ou seja:

$$E_1 = \left\{ (\alpha, 0, 0)^T : \alpha \in \mathbb{R} \right\}.$$

Como este espaço próprio tem dimensão 1, concluímos que a forma canónica de Jordan associada à matriz A é

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Designando por $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ e $\mathbf{v}_3$ as colunas duma matriz $\mathbf{S}$ tal que $\mathbf{A} = \mathbf{SJS}^{-1}$. Vem

$$\begin{aligned} \mathbf{A}\mathbf{v}_1 &= \mathbf{v}_1 \\ A\mathbf{v}_2 &= \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_1 \\ A\mathbf{v}_3 &= \mathbf{v}_3 + \mathbf{v}_2. \end{aligned}$$

Portanto $\mathbf{v}_1$ é um vector próprio e podemos tomar

$$\mathbf{v}_1 = \left[\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right].$$

Com esta escolha, $\mathbf{v}_2$ será uma solução de $(\mathbf{A} - \mathbf{I})\,\mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_1$ ou seja

$$\left[\begin{smallmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{smallmatrix}\right] \mathbf{v}_2 = \left[\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right].$$

Podemos tomar

$$\mathbf{v}_2 = \left[\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right].$$

Com esta escolha, por sua vez $\mathbf{v}_3$ será uma solução de $(\mathbf{A} - \mathbf{I})\,\mathbf{v}_3 = \mathbf{v}_2$ ou seja

$$\left[\begin{smallmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{smallmatrix}\right] \mathbf{v}_3 = \left[\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right].$$

Podemos tomar

$$\mathbf{v}_3 = \left[\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{smallmatrix}\right].$$

Temos então

$$\begin{aligned} e^{\mathbf{A}t} &= \mathbf{S}e^{\mathbf{J}t}\mathbf{S}^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^t & te^t & \frac{t^2}{2}e^t \\ 0 & e^t & te^t \\ 0 & 0 & e^t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \\ &= e^t \begin{bmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2} \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 1 & t-1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \\ &= e^t \begin{bmatrix} 1 & t + \frac{t^2}{2} & -\frac{t^2}{2} \\ 0 & 1+t & -t \\ 0 & t & 1-t \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Portanto, a solução geral do sistema homogéneo é dada por:

$$\mathbf{y}(t) = e^t \begin{bmatrix} 1 & t+\frac{t^2}{2} & -\frac{t^2}{2} \\ 0 & 1+t & -t \\ 0 & t & 1-t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix},$$

onde c_1,c_2 e c_3 são constantes reais arbitrárias, correspondentes à componentes de $\mathbf{y}(0)$.a

2. Determine a solução da equação dada que passa pelo ponto $\mathbf{y}(0) = (1,0,0)^T$.

R: Pela fórmula da variação das constantes, a solução da equação não-homogénea que satisfaz a condição inicial imposta, é dada por:

$$\mathbf{y}(t) = e^{\mathbf{A}t} \left[\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right] + e^{\mathbf{A}t} \int_0^t e^{-\mathbf{A}s} \mathbf{h}(s)\, ds,$$

ou seja, atendendo a que o vector $(1,0,0)^T$ é um vector próprio associado ao valor próprio 1,

$$\begin{aligned}
\mathbf{y}(t) &= e^t \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + e^t \begin{bmatrix} 1 & t+\frac{t^2}{2} & -\frac{t^2}{2} \\ 0 & 1+t & -t \\ 0 & t & 1-t \end{bmatrix} \int_0^t e^{-s} \begin{bmatrix} 1 & -s+\frac{s^2}{2} & -\frac{s^2}{2} \\ 0 & 1-s & s \\ 0 & -s & 1+s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ e^s \end{bmatrix} ds. \\
&= e^t \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + e^t \begin{bmatrix} 1 & t+\frac{t^2}{2} & -\frac{t^2}{2} \\ 0 & 1+t & -t \\ 0 & t & 1-t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\int_0^t \frac{s^2}{2}\, ds \\ \int_0^t s\, ds \\ \int_0^t (1+s)\, ds \end{bmatrix} \\
&= e^t \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + e^t \begin{bmatrix} 1 & t+\frac{t^2}{2} & -\frac{t^2}{2} \\ 0 & 1+t & -t \\ 0 & t & 1-t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{t^3}{6} \\ \frac{t^2}{2} \\ t+\frac{t^2}{2} \end{bmatrix} \\
&= e^t \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + e^t \begin{bmatrix} -\frac{1}{6}t^3 \\ -\frac{1}{2}t^2 \\ t-\frac{1}{2}t^2 \end{bmatrix} \\
&= e^t \begin{bmatrix} 1-\frac{1}{6}t^3 \\ -\frac{1}{2}t^2 \\ t-\frac{1}{2}t^2 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$