Análise Matemática IV

2º semestre de 2002/2003

Exercício-teste 10 - Resolução

1. Calcule a solução do seguinte problema de valor inicial:

$$y''' - y'' + 4y' - 4y = 4\operatorname{sen} 2t - 8\cos 2t + (2+5t)\, e^t,$$

com
$$y(0) = 0, \qquad y'(0) = 1 \quad \text{e} \quad y''(0) = 1.$$

Resolução:

A equação homogénea correspondente ($x''' - x'' + 4x' - 4x = 0$) tem o polinómio característico

$$\begin{aligned} \lambda^3 - \lambda^2 + 4\lambda - 4 &= (\lambda - 1)\left(\lambda^2 + 4\right) \\ &= (\lambda - 1)(\lambda - i2)(\lambda + i2). \end{aligned}$$

Por outro lado a função $4\operatorname{sen} 2t - 8\cos 2t + (2+5t)\, e^t$ é solução de uma equação homogénea com polinómio característico

$$(\lambda - i2)(\lambda + i2)(\lambda - 1)^2.$$

Então a solução $y(t)$ da equação dada (não homogénea) é ainda solução de uma equação homogénea com polinómio característico

$$(\lambda - i2)^2 (\lambda + i2)^2 (\lambda - 1)^3.$$

Pelo que

$$y(t) = c_1 \cos 2t + c_2 \operatorname{sen} 2t + c_3 e^t + \alpha_1 t\cos 2t + \alpha_2 t \operatorname{sen} 2t + \beta_1 t e^t + \beta_2 t^2 e^t,$$

Onde os valores de α_1, α_2, β_1 e β_2 são determinados pela equação (não homogénea) e os valores de c_1, c_2 e c_3 são determinados pelas condições iniciais.

Para simplificar a exposição vamos considerar

$$y(t) = x(t) + z(t) + w(t)$$

onde
$$x(t) = c_1 \cos 2t + c_2 \operatorname{sen} 2t + c_3 e^t$$

é solução da equação homogénea $x''' - x'' + 4x' - 4x = 0$,

$$z(t) = \alpha_1 t\cos 2t + \alpha_2 t \operatorname{sen} 2t$$

é solução da equação $z''' - z'' + 4z' - 4z = 4\operatorname{sen} 2t - 8\cos 2t$ e

$$w(t) = \beta_1 t e^t + \beta_2 t^2 e^t$$

é solução da equação $w''' - w'' + 4w' - 4w = (2+5t)\,e^t$

Temos os seguintes cálculos:

$$\begin{aligned}
&(t\cos 2t)' = \cos 2t - 2t\operatorname{sen} 2t && (t\operatorname{sen} 2t)' = \operatorname{sen} 2t + 2t\cos 2t\\
&(t\cos 2t)'' = -4\operatorname{sen} 2t - 4t\cos 2t && (t\operatorname{sen} 2t)'' = 4\cos 2t - 4t\operatorname{sen} 2t\\
&(t\cos 2t)''' = -12\cos 2t + 8t\operatorname{sen} 2t && (t\operatorname{sen} 2t)''' = -12\operatorname{sen} 2t - 8t\cos 2t
\end{aligned}$$

Pelo que

$$z''' - z'' + 4z' - 4z =$$

$$\begin{aligned}
= \;& \alpha_1(-12\cos 2t + 8t\operatorname{sen} 2t) + \alpha_2(-12\operatorname{sen} 2t - 8t\cos 2t) - \alpha_1(-4\operatorname{sen} 2t - 4t\cos 2t) -\\
& -\alpha_2(4\cos 2t - 4t\operatorname{sen} 2t) + 4\alpha_1(\cos 2t - 2t\operatorname{sen} 2t) + 4\alpha_2(\operatorname{sen} 2t + 2t\cos 2t) -\\
& -4\alpha_1 t\cos 2t - 4\alpha_2 t\operatorname{sen} 2t\\
= \;& (-12\alpha_1 - 4\alpha_2 + 4\alpha_1)\cos 2t + (-12\alpha_2 + 4\alpha_1 + 4\alpha_2)\operatorname{sen} 2t +\\
& + (-8\alpha_2 + 4\alpha_1 + 8\alpha_2 - 4\alpha_1)\,t\cos 2t + (8\alpha_1 + 4\alpha_2 - 8\alpha_1 - 4\alpha_2)\,t\operatorname{sen} 2t\\
= \;& (-8\alpha_1 - 4\alpha_2)\cos 2t + (4\alpha_1 - 8\alpha_2)\operatorname{sen} 2t.
\end{aligned}$$

Comparando com $z''' - z'' + 4z' - 4z = 4\operatorname{sen} 2t - 8\cos 2t$, obtemos

$$\begin{cases} -8\alpha_1 - 4\alpha_2 = -8\\ 4\alpha_1 - 8\alpha_2 = 4 \end{cases},$$

donde

$$\alpha_1 = 1 \quad \text{e} \quad \alpha_2 = 0.$$

Do mesmo modo

$$\begin{aligned}
&(te^t)' = e^t + te^t && (t^2e^t)' = 2te^t + t^2e^t\\
&(te^t)'' = 2e^t + te^t && (t^2e^t)'' = 2e^t + 4te^t + t^2e^t\\
&(te^t)''' = 3e^t + te^t && (t^2e^t)''' = 6e^t + 6te^t + t^2e^t
\end{aligned}$$

Pelo que

$$
\begin{aligned}
& w''' - w'' + 4w' - 4w = \\
= \; & \beta_1 \left(3e^t + te^t\right) + \beta_2 \left(6e^t + 6te^t + t^2 e^t\right) - \beta_1 \left(2e^t + te^t\right) - \beta_2 \left(2e^t + 4te^t + t^2 e^t\right) + \\
& + 4\beta_1 \left(e^t + te^t\right) + 4\beta_2 \left(2te^t + t^2 e^t\right) - 4\beta_1 te^t - 4\beta_2 t^2 e^t \\
= \; & \left(3\beta_1 + 6\beta_2 - 2\beta_1 - 2\beta_2 + 4\beta_1\right) e^t + \left(\beta_1 + 6\beta_2 - \beta_1 - 4\beta_2 + 4\beta_1 + 8\beta_2 - 4\beta_1\right) te^t + \\
& + \left(\beta_2 - \beta_2 + 4\beta_2 - 4\beta_2\right) t^2 e^t \\
= \; & \left(5\beta_1 + 4\beta_2\right) e^t + 10\beta_2 te^t
\end{aligned}
$$

Comparando com $w''' - w'' + 4w' - 4w = (2 + 5t)\, e^t$, obtemos

$$
\left\{ \begin{array}{l} 5\beta_1 + 4\beta_2 = 2 \\ 10\beta_2 = 5 \end{array} \right. ,
$$

donde

$$
\beta_1 = 0 \quad \text{e} \quad \beta_2 = \frac{1}{2}.
$$

Portanto

$$
y(t) = c_1 \cos 2t + c_2 \operatorname{sen} 2t + c_3 e^t + t \cos 2t + \frac{t^2}{2} e^t.
$$

Considerando agora as condições iniciais temos

$$
0 = y(0) = c_1 + c_3,
$$

$$
\begin{aligned}
y'(t) &= -2c_1 \operatorname{sen} 2t + 2c_2 \cos 2t + c_3 e^t + \cos 2t + 2t \operatorname{sen} 2t + te^t + \frac{t^2}{2} e^t \\
&= -2c_1 \operatorname{sen} 2t + (2c_2 + 1) \cos 2t + c_3 e^t + 2t \operatorname{sen} 2t + te^t + \frac{t^2}{2} e^t,
\end{aligned}
$$

$$
1 = y'(0) = 2c_2 + 1 + c_3,
$$

$$
\begin{aligned}
y''(t) &= -4c_1 \cos 2t - 2(2c_2 + 1) \operatorname{sen} 2t + c_3 e^t + 2 \operatorname{sen} 2t + 4t \cos 2t + \left(1 + 2t + \frac{t^2}{2}\right) e^t \\
&= -4c_1 \cos 2t - 4c_2 \operatorname{sen} 2t + (c_3 + 1) e^t + 4t \cos 2t + \left(2t + \frac{t^2}{2}\right) e^t,
\end{aligned}
$$

$$
1 = y''(0) = -4c_1 + c_3 + 1.
$$

Portanto

$$
\left\{ \begin{array}{r} c_1 + c_3 = 0 \\ 2c_2 + c_3 = 0 \\ -4c_1 + c_3 = 0 \end{array} \right. ,
$$

donde $c_1 = c_2 = c_3 = 0$. Temos então a solução do problema:

$$y(t) = t\cos 2t + \frac{t^2}{2}e^t.$$

2. Determine uma equação linear de segunda ordem com coeficientes constantes (não homogénea) que tenha como soluções as funções

$$u_1(t) = \cos t + t^4 \operatorname{sen} t \quad \text{e} \quad u_2(t) = \operatorname{sen} t + t^4 \operatorname{sen} t.$$

Resolução:

A diferença

$$u_1(t) - u_2(t) = \cos t - \operatorname{sen} t,$$

será então solução da equação linear homogénea associada. Portanto o polinómio característico correspondente terá de conter os factores

$$(\lambda + i)(\lambda - i) = \lambda^2 + 1.$$

A equação de 2ª ordem nestas condições é $x'' + x = 0$. Portanto a equação pretendida é da forma

$$y'' + y = h(t).$$

Em particular

$$\begin{aligned}
h(t) &= u_1''(t) + u_1(t) \\
&= \left(\cos t + t^4 \operatorname{sen} t\right)'' + \left(\cos t + t^4 \operatorname{sen} t\right) \\
&= \left(t^4 \operatorname{sen} t\right)'' + t^4 \operatorname{sen} t \\
&= \left(4t^3 \operatorname{sen} t + t^4 \cos t\right)' + t^4 \operatorname{sen} t \\
&= 12t^2 \operatorname{sen} t + 8t^3 \cos t - t^4 \operatorname{sen} t + t^4 \operatorname{sen} t \\
&= 12t^2 \operatorname{sen} t + 8t^3 \cos t.
\end{aligned}$$

Obtemos então a equação pretendida:

$$y'' + y = 12t^2 \operatorname{sen} t + 8t^3 \cos t.$$