Análise Matemática IV

2º semestre de 2002/2003

Exercício-teste 11

(1) Considere a função $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=x$. Determine:

(a) a série de Fourier associada a f;

(b) a série de senos associada a f;

(c) a série de cosenos associada a f.

Resolução:

(a) À função f está associada a série de Fourier

$$SF[f](x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\Big(a_n\cos(2n\pi x)+b_n\,\mathrm{sen}(2n\pi x)\Big)$$

com

$$a_n=2\int_0^1 f(x)\cos(2n\pi x)\,dx\quad\text{para}\quad n\geq 0$$

e

$$b_n=2\int_0^1 f(x)\,\mathrm{sen}(2n\pi x)\,dx\quad\text{para}\quad n\in\mathbb{N}.$$

Calculando os coeficientes, tem-se

$$a_0=2\int_0^1 x\,dx=1$$

e para $n\in\mathbb{N}$

$$\begin{aligned} a_n &= 2\int_0^1 x\cos(2n\pi x)\,dx \\ &= 2\Big(\frac{x}{2n\pi}\,\mathrm{sen}(2\pi nx)\Big|_0^1-\frac{1}{2n\pi}\int_0^1 \sin(2\pi nx)\,dx\Big)=0 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} b_n &= 2\int_0^1 x\,\mathrm{sen}(2n\pi x)\,dx \\ &= 2\Big(-\frac{x}{2n\pi}\cos(2\pi nx)\Big|_0^1 + \frac{1}{2n\pi}\int_0^1 \cos(2\pi nx)\,dx\Big) \\ &= -\frac{1}{n\pi}\cos(2\pi n) = -\frac{1}{n\pi} \end{aligned}$$

Temos então que, para $x \in [0,1]$

$$SF[f](x) = \frac{1}{2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\pi}\,\mathrm{sen}(2n\pi x).$$

Dado que $f(x)$ é contínua em $[0,1]$, podemos concluir que

$$SF[f](x) = \begin{cases} x & \text{se } x \in]0,1[\\ \frac{1}{2} & \text{se } x = 0 \text{ ou } x = 1 \end{cases}$$

(b) A série de senos associada a f é

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n\,\mathrm{sen}(n\pi x)$$

em que

$$b_n = 2\int_0^1 f(x)\,\mathrm{sen}(n\pi x)\,dx = 2\int_0^1 x\,\mathrm{sen}(n\pi x)\,dx = 2\frac{(-1)^{n+1}}{\pi n}$$

(c) A série de cosenos associada a f é

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\pi x)$$

onde

$$a_0 = 2\int_0^1 f(x)\,dx = 2\int_0^1 x\,dx = 1$$

e para $n \in \mathbb{N}$

$$a_n = 2\int_0^1 f(x)\cos(n\pi x)\,dx = 2\int_0^1 x\cos(n\pi x)\,dx = \frac{2}{\pi^2 n^2}((-1)^n - 1)$$