Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

ANÁLISE MATEMÁTICA IV

1º Teste

(CURSO: LEIC)

Justifique cuidadosamente todas as respostas.

Data: 12/04/2003, 11h00
Duração: 1h30.

(4 val.) 1. Seja $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$u(x, y) = x(y + 2).$$

Mostre que u é harmónica. Determine uma função analítica f tal que $u = \operatorname{Re} f$ e $f(i) = i$.

(3 val.) 2. Obtenha o desenvolvimento em série de Laurent, centrado na origem e convergente se $|z| > 2$, da função

$$h(z) = \frac{1}{(z-2)^2}.$$

(5 val.) 3. Considere a curva $\gamma = \{z \in \mathbb{C} : |z - i| = 1\}$, percorrida uma vez no sentido directo. Calcule

$$\oint_\gamma \left(\frac{\operatorname{sen} z^2}{(z-i)^3} + z\, e^{\frac{1}{z-i}} \right) dz.$$

(5 val.) 4. *Utilizando* o Teorema dos Resíduos, determine

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2 - x + 2}{x^4 + 10x^2 + 9} dx.$$

(3 val.) 5. Considere o seguinte problema de valor inicial:

$$\frac{dy}{dt} = \frac{t\, e^{-t^2}}{y \cos y^2} \quad \text{com} \quad y(0) = -\sqrt{3\pi}.$$

Explicite a sua solução indicando o intervalo máximo de definição.

1. A função u é um polinómio e portanto é de classe C^2. Como, para qualquer $(x,y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\begin{aligned} \triangle u &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \\ &= \frac{\partial}{\partial x}(y+2) + \frac{\partial}{\partial y}(x) = 0 + 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

conclui-se que u é harmónica em $\mathbb{R}^2$. Seja $f = u + iv$ analítica. Para que tal aconteça é suficiente que v seja harmónica conjugada de u, i.e., que v seja de classe C^1 e que (u,v) satisfaçam as equações de Cauchy-Riemann

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \end{cases}.$$

Portanto $\frac{\partial v}{\partial y} = y + 2$, ou seja $v(x,y) = \frac{1}{2}y^2 + 2y + h(x)$, pelo que $x = -\frac{\partial v}{\partial x} = -h'(x) \Rightarrow h(x) = -\frac{1}{2}x^2 + c$ com $c \in \mathbb{R}$ arbitrário. Tem-se então $v(x,y) = \frac{1}{2}\left(y^2 - x^2\right) + 2y + c$ e portanto $f(z) = (y+2)x + i\left(\frac{1}{2}\left(y^2 - x^2\right) + 2y + c\right)$. Requerendo que $f(i) = i$ tem-se $i = f(i) = (1+2)\cdot 0 + i(\frac{1}{2}(1-0) + 2 + c) = \left(\frac{5}{2} + c\right) i$ e portanto $c = -\frac{3}{2}$, vindo

$$f(z) = (y+2)x + i\left(\frac{1}{2}\left(y^2 - x^2\right) + 2y - \frac{3}{2}\right).$$

2. Observe-se que

$$\frac{1}{z-2} = \frac{1}{z}\frac{1}{1-\frac{2}{z}} = \frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2}{z}\right)^n = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2}{z}\right)^{n+1}, \text{se } \left|\frac{2}{z}\right| < 1 \Leftrightarrow |z| > 2.$$

Portanto, se $|z| > 2$,

$$\begin{aligned} h(z) &= \frac{1}{(z-2)^2} = -\frac{d}{dz}\frac{1}{(z-2)} \\ &= -\frac{1}{2}\frac{d}{dz}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2}{z}\right)^{n+1} = -\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{d}{dz}\left(\frac{2}{z}\right)^{n+1} \\ &= -\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} -(n+1)\,\frac{2^{n+1}}{z^{n+2}} = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)2^n z^{-n-2} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{-2}(-n-1)2^{-n-2}z^n. \end{aligned}$$

3. Pela linearidade do integral de linha relativamente à função integranda o integral pedido é igual a

$$\oint_\gamma \frac{\operatorname{sen} z^2}{(z-i)^3}\, dz + \oint_\gamma z\, e^{\frac{1}{z-i}}\, dz$$

e podemos calcular os dois integrais separadamente.

Uma vez que $\operatorname{sen} z^2$ é uma função analítica em $\mathbb{C}$ (porque é a composição de funções analítica: $\operatorname{sen} z$ e z^2) e $z = i$ está na região delimitada pela curva γ, temos pelas fórmulas integrais de Cauchy

$$\begin{aligned}
\oint_\gamma \frac{\operatorname{sen} z^2}{(z-i)^3} &= 2\pi i \frac{1}{2!}\left[\frac{d^2}{dz^2}\operatorname{sen} z^2\right]_{z=i} \\
&= \pi i \left[\frac{d}{dz} 2z\cos z^2\right]_{z=i} \\
&= \left[2\cos z^2 - 4z^2 \operatorname{sen} z^2\right]_{z=i} \\
&= 2\pi i\left(\cos 1 - 2\operatorname{sen} 1\right).
\end{aligned}$$

Considere-se agora a função $z\, e^{\frac{1}{z-i}}$. O desenvolvimento desta função em série de Laurent, centrada em i e convergente em $0 < |z-i|$ é

$$\begin{aligned}
z\, e^{\frac{1}{z-i}} &= (z-i)e^{\frac{1}{z-i}} + ie^{\frac{1}{z-i}} = \\
&= (z-i)\left(1 + \frac{1}{z-i} + \frac{1}{2!}\left(\frac{1}{z-i}\right)^2 + \cdots\right) + i\left(1 + \frac{1}{z-i} + \cdots\right) \\
&= z - i + 1 + i + \left(\frac{1}{2} + i\right)\frac{1}{z-i} + \cdots
\end{aligned}$$

Consequentemente $\operatorname*{Res}_{z=i} z\, e^{\frac{1}{z-i}} = \frac{1}{2} + i$, e, pelo Teorema dos Resíduos,

$$\oint_\gamma z\, e^{\frac{1}{z-i}} dz = 2\pi i\left(\frac{1}{2} + i\right) = -2\pi + i\pi.$$

Finalmente, o valor do integral no enunciado será a soma dos dois resultados obtidos acima, ou seja, será igual a

$$-2\pi + i(2\cos 1 - 4\operatorname{sen} 1 + 1)\pi.$$

4. Como a função integranda verifica[1]

$$\frac{x^2-x+2}{x^4+10x^2+9} \sim O(x^{-2}) \quad \text{quando} \quad |x|\to\infty,$$

concluímos que é Lebesgue integrável em $\mathbb{R}$ e pode-se escrever

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2-x+2}{x^4+10x^2+9}dx = \lim_{R\to+\infty} \int_{-R}^{R} \frac{x^2-x+2}{x^4+10x^2+9}dx.$$

Seja $f(z) \overset{\text{def}}{=} \frac{z^2-z+2}{z^4+10z^2+9}$. Considere-se a curva $\gamma_R = \ell_R + C_R$ (i.e. γ_R é a concatenação das curvas ℓ_R e C_R), onde $\ell_R = [-R,R]$ é percorrida uma vez de $-R$ para R e a curva $C_R = \{z\in\mathbb{C} : |z| = R, \operatorname{Im} z \geqslant 0\}$ é percorrida uma vez de R para $-R$. A curva γ_R é obviamente fechada e seccionalmente C^1. Sendo f uma função racional as suas singularidades são os zeros do denominador, ou seja, $z^4+10z^2+9=0 \Leftrightarrow (z^2+1)(z^2+9)=0 \Leftrightarrow z=\pm i, \pm 3i$. Se tomarmos $R>3$, aplicando o Teorema dos Resíduos tem-se

$$\oint_{\gamma_R} f(z)dz = 2\pi i \operatorname*{Res}_{z=i} f(z) + 2\pi i \operatorname*{Res}_{z=3i} f(z).$$

Como $i^2 - i + 2 = -i + 1 \neq 0$ e $(3i)^2 - 3i + 2 = -3i - 7 \neq 0$ conclui-se que i e $3i$ são pólos simples (i.e., de primeira ordem) de f. Assim,

$$\begin{aligned}
\operatorname*{Res}_{z=i} f(z) &= \lim_{z\to i}(z-i)f(z) = \lim_{z\to i}(z-i)\frac{z^2-z+2}{z^4+10z^2+9} = \\
&= \lim_{z\to i}(z-i)\frac{z^2-z+2}{(z-i)(z+i)(z-3i)(z+3i)} = -\frac{1+i}{16} \\
\operatorname*{Res}_{z=3i} f(z) &= \lim_{z\to 3i}(z-3i)f(z) = \lim_{z\to 3i}(z-3i)\frac{z^2-z+2}{z^4+10z^2+9} = \\
&= \lim_{z\to 3i}(z-3i)\frac{z^2-z+2}{(z-i)(z+i)(z-3i)(z+3i)} = \frac{3-7i}{48}
\end{aligned}$$

e, pelo Teorema dos Resíduos,

$$\oint_{\gamma_R} f(z)dz = -2\pi i\frac{1+i}{16} + 2\pi i\frac{3-7i}{48} = \frac{5\pi}{12}.$$

Como[2]

$$\operatorname{grau}\left(z^2-z+2\right) = 2 \leqslant \operatorname{grau}\left(z^4+10z^2+9\right) - 2 = 2,$$

conclui-se que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2-x+2}{x^4+10x^2+9}dx = \lim_{R\to+\infty}\oint_{\gamma_R} f(z)dz - \lim_{R\to+\infty}\int_{C_R} f(z)dz = \frac{5\pi}{12}.$$

[1]Note-se também que $\forall x\in\mathbb{R}, \qquad x^4+10x^2+9>0.$

[2]Ou

$$\begin{aligned}
\left|\int_{C_R} f(z)dz\right| &\leqslant \int_{C_R} \frac{|z^2-z+2|}{|z^4+10z^2+9|}|dz| = \int_{C_R} \frac{|z^2-z+2|}{|z-i|\cdot|z+i|\cdot|z-3i|\cdot|z+3i|}|dz| \leq \\
&\leqslant \frac{R^2+R+2}{(R-1)^2(R-3)^2}\int_{C_R}|dz| = \\
&\leqslant \frac{\pi R(R^2+R+2)}{(R-1)^2(R-3)^2} \longrightarrow 0 \quad \text{quando } R\to+\infty.
\end{aligned}$$

5. Trata-se de uma equação separável:

$$y \cos y^2 \frac{dy}{dt} = t\, e^{-t^2}$$

donde

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left(\operatorname{sen} y^2\right) = \frac{-1}{2} \frac{d}{dt} e^{-t^2}.$$

Integrando, obtemos

$$\operatorname{sen} y^2 = -e^{-t^2} + c$$

onde c é uma constante. Usando a condição inicial, vem

$$\begin{aligned} c &= \left[e^{-t^2} + \operatorname{sen} y^2\right]_{t=0;\ y=-\sqrt{3\pi}} \\ &= 1 + \operatorname{sen} 3\pi \\ &= 1. \end{aligned}$$

Donde

$$\operatorname{sen} y^2 = 1 - e^{-t^2}.$$

Invertendo a função sen numa vizinhança do ponto 3π, obtemos

$$y^2 = 3\pi - \operatorname{arcsen}\left(1 - e^{-t^2}\right).$$

Donde

$$y = \pm\sqrt{3\pi - \operatorname{arcsen}\left(1 - e^{-t^2}\right)}.$$

Atendendo novamente a que $y(0) = -\sqrt{3\pi}$, obtemos a solução do problema:

$$y(t) = -\sqrt{3\pi - \operatorname{arcsen}\left(1 - e^{-t^2}\right)},$$

que tem como intervalo (máximo) de definição $\mathbb{R}$, uma vez que, para todo $t \in \mathbb{R}$,

$$0 < e^{-t^2} \leqslant 1,$$

$$-1 < 0 \leqslant 1 - e^{-t^2} < 1,$$

$$\operatorname{arcsen}\left(1 - e^{-t^2}\right) < \frac{\pi}{2},$$

$$0 < \frac{5\pi}{2} < 3\pi - \operatorname{arcsen}\left(1 - e^{-t^2}\right).$$