

ANÁLISE MATEMÁTICA IV

1º Teste

(CURSO: LEIC)

Justifique cuidadosamente todas as respostas.

Data: 12/04/2003, 11h00

Duração: 1h30.

- (4 val.) 1. Seja $u : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$u(x, y) = x(y + 2).$$

Mostre que u é harmónica. Determine uma função analítica f tal que $u = \operatorname{Re} f$ e $f(i) = i$.

- (3 val.) 2. Obtenha o desenvolvimento em série de Laurent, centrado na origem e convergente se $|z| > 2$, da função

$$h(z) = \frac{1}{(z - 2)^2}.$$

- (5 val.) 3. Considere a curva $\gamma = \{z \in \mathbb{C} : |z - i| = 1\}$, percorrida uma vez no sentido directo. Calcule

$$\oint_{\gamma} \left(\frac{\operatorname{sen} z^2}{(z - i)^3} + z e^{\frac{1}{z-i}} \right) dz.$$

- (5 val.) 4. *Utilizando* o Teorema dos Resíduos, determine

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2 - x + 2}{x^4 + 10x^2 + 9} dx.$$

- (3 val.) 5. Considere o seguinte problema de valor inicial:

$$\frac{dy}{dt} = \frac{t e^{-t^2}}{y \cos y^2} \quad \text{com} \quad y(0) = -\sqrt{3\pi}.$$

Explícite a sua solução indicando o intervalo máximo de definição.