Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

ANÁLISE MATEMÁTICA IV

2º Teste / 1º Exame

(LEA,LEB,LEC,LEGI,LEIC,LEMat,LEM,LEMG,LEN,LEQ,LQ)

Justifique cuidadosamente todas as respostas.

Data: 23/06/2003, 9h00
Duração: Teste 1h30, Exame 3h00.

1. Seja $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$u(x,y) = ax^2 + by^2 + cxy.$$

onde a, b, c são constantes reais.

Para que valores das constantes a, b, e c é que u é a parte real de uma função analítica em $\mathbb{C}$? Para esses valores das constantes, determine uma função harmónica conjugada de u.

Resolução:

A função dada $u(x,y) = ax^2 + by^2 + cxy,\ a, b, c \in \mathbb{R}$, é a parte real de uma função analítica em $\mathbb{C}$ sse u é harmónica. Como $u(x,y)$ é de classe C^2 para todos os valores de $a, b, c \in \mathbb{R}$, teremos apenas de verificar

$$\frac{\partial^2 u}{dx^2} + \frac{\partial^2 u}{dy^2} = 0, \qquad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

Calculando as derivadas parciais de u, temos que:

$$\frac{\partial u}{dx} = 2ax + cy \qquad\qquad \frac{\partial u}{dy} = 2by + cx$$

$$\frac{\partial^2 u}{dx^2} = 2a \qquad\qquad \frac{\partial^2 u}{dy^2} = 2b$$

Portanto, u é parte real de uma função analítica sse $a = -b$. Para determinar uma função harmónica conjugada de u, digamos v, sabemos que u e v estão relacionadas pelas condições de Cauchy-Riemann:

$$\frac{\partial u}{dx} = \frac{\partial v}{dy} \quad \text{e} \quad \frac{\partial u}{dy} = -\frac{\partial v}{dx}.$$

Da primeira condição, concluímos que $\dfrac{\partial v}{dy} = 2ax + cy$, donde, primitivando em ordem a y, se conclui que:

$$v(x,y) = 2axy + c\frac{y^2}{2} + \phi(x),$$

onde ϕ é uma função na variável x apenas. Calculando $\dfrac{\partial v}{dx}$, tem-se que

$$\frac{\partial v}{dx} = 2ay + \phi'(x) = -\frac{\partial u}{dy} = -(2by + cx).$$

Como $a = -b$, concluímos que $\phi'(x) = -cx$, e portanto uma função harmónica conjugada de u será:

$$v(x, y) = \frac{c}{2}(y^2 - x^2) + 2axy.$$

2. Considere a região de $\mathbb{C}$ definida por

$$R \stackrel{\text{def}}{=} \{z = x + iy : |x| < 2, 0 < y < 1\}.$$

Calcule

$$\int_{\partial R} \frac{dz}{(z^2-1)^2+3},$$

onde ∂R é o bordo de R percorrido uma vez em sentido directo.
(*Observação:* $\cos\frac{\pi}{3} = sen\,\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$, $\cos\frac{\pi}{6} = sen\,\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.)

Resolução:
A função $\frac{1}{(z^2-1)^2+3}$ tem singularidades nos pontos $z^2 = 1 \pm i\sqrt{3} = 2\exp\left(\pm i\frac{\pi}{3}\right)$ ou seja $z = \pm\sqrt{2}\exp i\left(\pm\frac{\pi}{6}\right)$. Logo a função $\frac{1}{(z^2-1)^2+3}$ tem pólos simples e o Teorema dos Resíduos permite escrever

$$\begin{aligned}
\int_{\partial R} \frac{dz}{(z^2-1)^2+3} &= 2\pi i\left(\operatorname*{Res}_{z=\sqrt{2}\exp i\frac{\pi}{6}} \frac{1}{(z^2-1)^2+3} + \operatorname*{Res}_{z=\sqrt{2}\exp i\frac{5\pi}{6}} \frac{1}{(z^2-1)^2+3}\right) \\
&= 2\pi i\left(\frac{1}{4\sqrt{2}\exp i\frac{\pi}{6}(2\exp i\frac{\pi}{3}-1)} + \frac{1}{4\sqrt{2}\exp i\frac{5\pi}{6}(2\exp i\frac{5\pi}{3}-1)}\right) \\
&= 2\pi i\left(\frac{1}{2\sqrt{2}(\sqrt{3}+i)i\sqrt{3}} + \frac{1}{2\sqrt{2}(-\sqrt{3}+i)(-i\sqrt{3})}\right) \\
&= \frac{\pi i}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{(-\sqrt{3}+i3)} + \frac{1}{(\sqrt{3}+i3)}\right) \\
&= \frac{\pi i}{\sqrt{2}}\left(\frac{6i}{-3-9}\right) \\
&= \frac{\pi}{2\sqrt{2}}.
\end{aligned}$$

3. Utilizando o Teorema dos Resíduos, mostre que

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{3+2\cos t}dt = \frac{2\pi}{\sqrt{5}}.$$

Resolução:

Atendendo a que $\cos t = \frac{e^{it}+e^{-it}}{2}$, e considerando a parametrização $z = e^{it}$ com $t \in [0, 2\pi[$, obtém-se

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{3+2\cos t}dt = \oint_{|z|=1} \frac{1}{(3+z+z^{-1})iz}dz = \frac{1}{i}\oint_{|z|=1} \frac{1}{z^2+3z+1}dz$$

Por ser uma função racional, $f(z) = \frac{1}{z^2+3z+1}$ é analítica em $\mathbb{C} \setminus \{z : z^2+3z+1 = 0\} = \mathbb{C} \setminus \{\frac{-3+\sqrt{5}}{2}, \frac{-3-\sqrt{5}}{2}\}$. Atendendo a que $\left|\frac{-3+\sqrt{5}}{2}\right| < 1$ e $\left|\frac{-3-\sqrt{5}}{2}\right| > 1$, estamos nas condições do Teorema dos Resíduos, e podemos concluir que

$$\oint_{|z|=1} \frac{1}{z^2+3z+1}dz = 2\pi i \operatorname*{Res}_{z=\frac{-3+\sqrt{5}}{2}} f(z)$$

Dado que

$$\lim_{z\to\frac{-3+\sqrt{5}}{2}} (z - \frac{-3+\sqrt{5}}{2})f(z) = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

podemos afirmar que $\frac{-3+\sqrt{5}}{2}$ é um pólo simples e que $\operatorname*{Res}_{z=\frac{-3+\sqrt{5}}{2}} f(z) = \frac{1}{\sqrt{5}}$. Sendo assim

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{3+2\cos t}dt = \frac{1}{i}2\pi i\frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{2\pi}{\sqrt{5}}$$

como se queria mostrar.

4. Considere a função $f(z) = \dfrac{1}{\operatorname{sen} z}$. Determine o interior da região de convergência da série de Laurent centrada em $z_0 = 0$ e convergente no ponto $z = 3 + i4$.

Resolução:

A função $\dfrac{1}{\operatorname{sen} z}$, tem singularidades isoladas nos pontos onde a função seno se anula, isto é, em $z = k\pi, k \in \mathbb{Z}$. Como $z = 3 + 4i$ tem módulo igual a 5, e $\pi < 5 < 2\pi$, concluímos que o interior da região de convergência da série de Laurent centrada em $z_0 = 0$ e convergente no ponto $z = 3 + i4$ é região anular,

$$A = \{z \in \mathbb{C} : \pi < |z| < 2\pi\}.$$

5. Seja g uma função analítica em $\mathbb{C}$ e não constante. Mostre que os pólos da função

$$f(z) = \frac{g'(z)}{g(z)}$$

são todos de primeira ordem e calcule os respectivos resíduos.

Resolução:

Sendo g uma função analítica em $\mathbb{C}$ não possui singularidades e portanto as únicas singularidades da função f serão os zeros de g. Como g não é identicamente nula cada um dos zeros de g tem uma ordem finita. Seja então $z_0 \in \mathbb{C}$ um zero de ordem m de g ($m \geqslant 1$). De acordo com o Teorema de Taylor existe uma vizinhança $D(z_0, r)$ de z_0 onde se tem se tem

$$g(z) = \sum_{n=m}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n \tag{1}$$

e $a_m \neq 0$. Derivando (1) tem-se

$$g'(z) = \sum_{n=m}^{+\infty} n a_n (z - z_0)^{n-1}$$

e portanto pode-se escrever, para todos os $z \in D(z_0, r)$,

$$f(z) = \frac{\sum\limits_{n=m}^{+\infty} n a_n (z - z_0)^{n-1}}{\sum\limits_{n=m}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n}.$$

Então

$$\begin{aligned}
\lim_{z \to z_0} (z - z_0) f(z) &= \lim_{z \to z_0} \frac{\sum\limits_{n=m}^{+\infty} n a_n (z - z_0)^n}{\sum\limits_{n=m}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n} \\
&= \lim_{z \to z_0} \frac{\sum\limits_{n=m}^{+\infty} n a_n (z - z_0)^{n-m}}{\sum\limits_{n=m}^{+\infty} a_n (z - z_0)^{n-m}} \\
&= \frac{m a_m}{a_m} \\
&= m
\end{aligned}$$

Como $m \neq 0$ conclui-se por esta expressão que z_0 é um pólo de ordem um de f e o resíduo de f aí é

$$\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z) = m,$$

a ordem do zero de g.

6. Considere a equação diferencial

$$\left(\frac{y}{x} + \log y \right) + \left(\frac{x}{y} + \log x \right) \frac{dy}{dx} = 0.$$

a) Mostre que esta equação é exacta.

b) Determine uma expressão (eventualmente implícita) para a solução da equação que satisfaz a condição inicial $y(2) = 2$.

Resolução:

a) Sejam $M(x,y) \stackrel{\text{def}}{=} \left(\frac{y}{x} + \log y\right)$ e $N(x,y) \stackrel{\text{def}}{=} \left(\frac{x}{y} + \log x\right)$. A função vectorial (M,N) está definida em $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ e verifica-se

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{\partial N}{\partial x}.$$

Consequentemente a equação é exacta em $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$.

b) Pelo resultado da alínea anterior e devido a $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ ser simplesmente conexo, conclui-se que existe um potencial $\Phi : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ tal que $\nabla\Phi = (M,N)$. Portanto

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \Phi}{\partial x} = \dfrac{y}{x} + \log y \\[2ex] \dfrac{\partial \Phi}{\partial y} = \dfrac{x}{y} + \log x \end{cases} \tag{2}$$

Da primeira equação tem-se, integrando em ordem a x,

$$\Phi(x,y) = y\log x + x\log y + h(y).$$

Derivando esta igualdade em ordem a y vem

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = \log x + \frac{x}{y} + h'(y)$$

e comparando esta expressão com a segunda equação em (2) conclui-se que $h'(y) = 0$, ou seja $h(y) = \text{const}$. Sem perda de generalidade pode-se tomar $h(y) = 0$ e um potencial Φ é $\Phi(x,y) = x\log y + y\log x$. A equação diferencial dada toma então a forma

$$\frac{d}{dx}\Phi(x, y(x)) = 0$$

e portanto pode ser integrada resultando em

$$\Phi(x, y(x)) = C,$$

ou seja

$$x\log y + y\log x = C.$$

A constante real arbitrária C pode ser determinada atendendo à condição inicial $y = 2$ quando $x = 2$:

$$2\log 2 + 2\log 2 = C \Leftrightarrow C = 4\log 2$$

e a expressão (implícita) para a solução $y = y(x)$ é

$$x\log y + y\log x = 4\log 2.$$

Esta expressão define de facto um função implícita $y(x)$ na vizinhança do ponto $(2,2)$ porque

$$N(2,2) = \frac{\partial \Phi}{\partial y}(2,2) = \log 2 + 1 \neq 0.$$

7. Determine a solução do problema de valores iniciais

$$\begin{cases} \boldsymbol{x}' = A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{h}(t) \\ \boldsymbol{x}(0) = (1,1)^T \end{cases}$$

onde $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ e $\boldsymbol{h}(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ e^t \end{bmatrix}$

Resolução:

Comecemos por calcular a matriz e^{At}. A matriz A tem por valores próprios $1+2i$ e $1-2i$ associados aos vectores próprios $(i,1)$ e $(-i,1)$ respectivamente. Assim, a matriz A é diagonalizável, ou seja , $A = S\,\Lambda\,S^{-1}$ em que

$$\Lambda = \begin{bmatrix} 1+2i & 0 \\ 0 & 1-2i \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad S = \begin{bmatrix} i & -i \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Tem-se então

$$\begin{aligned}
e^{At} = S\,e^{\Lambda t}S^{-1} &= \begin{bmatrix} i & -i \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{(1+2i)t} & 0 \\ 0 & e^{(1-2i)t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2i} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2i} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \\
&= \frac{e^t}{2i} \begin{bmatrix} i(e^{2it} + e^{-2it}) & -e^{2it} + e^{-2it} \\ e^{2it} - e^{-2it} & i(e^{2it} + e^{-2it}) \end{bmatrix} \\
&= e^t \begin{bmatrix} \cos 2t & -\operatorname{sen} 2t \\ \operatorname{sen} 2t & \cos 2t \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Aplicando a fórmula da variação das constantes, a solução da equação $x' = Ax + h(t)$, $x(0) = (1,1)^T$ é

$$\begin{aligned}
x(t) &= e^{At} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + e^{At} \int_0^t e^{-As} \begin{bmatrix} 0 \\ e^s \end{bmatrix} ds \\
&= e^{At} \Big(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \int_0^t e^{-s} \begin{bmatrix} \cos 2s & \operatorname{sen} 2s \\ -\operatorname{sen} 2s & \cos 2s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ e^s \end{bmatrix} ds \Big) \\
&= e^{At} \Big(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \int_0^t \begin{bmatrix} \operatorname{sen} 2s \\ \cos 2s \end{bmatrix} ds \Big) \\
&= e^t \begin{bmatrix} \cos 2t & -\operatorname{sen} 2t \\ \operatorname{sen} 2t & \cos 2t \end{bmatrix} \Big(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\frac{\cos 2t}{2} + \frac{1}{2} \\ \frac{\operatorname{sen} 2t}{2} \end{bmatrix} \Big) \\
&= e^t \begin{bmatrix} \cos 2t & -\operatorname{sen} 2t \\ \operatorname{sen} 2t & \cos 2t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{\cos 2t}{2} + \frac{3}{2} \\ 1 + \frac{\operatorname{sen} 2t}{2} \end{bmatrix} \\
&= e^t \begin{bmatrix} -\frac{\cos^2 2t}{2} + \frac{3}{2}\cos 2t - \operatorname{sen} 2t - \frac{\operatorname{sen}^2 2t}{2} \\ \frac{3}{2}\operatorname{sen} 2t + \cos 2t \end{bmatrix} \\
&= e^t \begin{bmatrix} \frac{3}{2}\cos 2t - \operatorname{sen} 2t - \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2}\operatorname{sen} 2t + \cos 2t \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

8. Determine a solução do problema de valores iniciais

$$\begin{cases} y'' - y' - 2y = 2\delta(t-2) \\ y(0) = y'(0) = 0 \end{cases}$$

onde $\delta(t-2)$ designa a distribuição delta de Dirac no ponto 2.

Resolução:

Aplicando transformada de Laplace para resolver o p.v.i.

$$\begin{aligned} & y'' - y' - 2y = 2\delta(t-2) \\ & y(0) = y'(0) = 0, \end{aligned}$$

e designando por $Y(s) = \mathcal{L}(y)$ a transformada de Laplace de y (e de um modo geral,$F(s) = \mathcal{L}(f)$), e atendendo às condições iniciais, temos que:

$$s^2 Y - sY - 2Y = 2\mathcal{L}(\delta(t-2)) = 2e^{-2s},$$

ou seja:

$$Y = \frac{2e^{-2s}}{s^2 - s - 2} = \frac{2e^{-2s}}{(s+1)(s-2)}.$$

Como $\frac{1}{(s+1)(s-2)} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{s-2} - \frac{1}{s+1}\right)$, temos que

$$Y = \frac{2}{3}e^{-2s}\left(\frac{1}{s-2} - \frac{1}{s+1}\right).$$

Atendendo a que $\mathcal{L}(H_c(t)f(t-c)) = e^{-cs}\mathcal{L}(f(t))$, onde

$$H_c(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } 0 \leqslant t < c \\ 1 & \text{se } t \geqslant c \end{cases}$$

e que

$$\frac{1}{s-a} = \mathcal{L}(e^{at}),\ s > a,$$

concluímos que

$$y(t) = \frac{2}{3}\left[H_2(t)e^{2(t-2)} - H_2(t)e^{-(t-2)}\right].$$

ou seja:

$$y(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } 0 \leqslant t < 2 \\ \frac{2}{3}\left[e^{2(t-2)} - e^{-(t-2)}\right], & \text{se } t \geqslant 2 \end{cases}$$

9. Seja $f(t)$ o prolongamento 2π-periódico a todo o $\mathbb{R}$ da função $g(t)$ dada por

$$g(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } -\pi \leq t \leq 0 \\ t & \text{se } 0 < t < \pi \end{cases}$$

Determine a série de Fourier de f e estude-a quanto à sua convergência pontual.

Resolução:

A função f é seccionalmente diferenciável em $\mathbb{R}$ e portanto é integrável em $[-\pi, \pi]$ podendo-se calcular os seus coeficientes de Fourier do seguinte modo:

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(t)dt = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} tdt = \frac{\pi}{2} \\ a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(t)\cos(nt)dt = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} t\cos(nt)dt \\ b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(t)\,\text{sen}(nt)dt = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} t\,\text{sen}(nt)dt \end{aligned}$$

calculando por partes o integral que define a_n tem-se

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} t\cos(nt)dt &= \frac{1}{n}t\,\text{sen}(nt)\Big|_0^{\pi} - \frac{1}{n}\int_0^{\pi}\text{sen}(nt)dt = \\ &= \frac{1}{n^2}\cos(nt)\Big|_0^{\pi} = \frac{1}{n^2}\left(\cos(n\pi) - 1\right) = \\ &= \frac{(-1)^n - 1}{n^2} \end{aligned}$$

e de modo análogo para o integral de b_n :

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} t\,\text{sen}(nt)dt &= \frac{-1}{n}t\cos(nt)\Big|_0^{\pi} + \frac{1}{n}\int_0^{\pi}\cos(nt)dt = \\ &= -\frac{\pi}{n}(-1)^n - \frac{1}{n^2}\,\text{sen}(nt)_0^{\pi} = \\ &= \frac{\pi}{n}(-1)^{n+1}. \end{aligned}$$

Portanto a série de Fourier de f é

$$\frac{\pi}{4} + \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{(-1)^n - 1}{\pi n^2}\cos(nt) + \frac{1}{n}(-1)^{n+1}\,\text{sen}(nt)\right).$$

Como f é seccionalmente $\mathcal{C}^1$ em $\mathbb{R}$, o Teorema de Fourier é aplicável e pode-se concluir que a série de Fourier de f é pontualmente convergente em todos os $x \in \mathbb{R}$ e tem-se o seguinte para a sua soma

$$\frac{\pi}{4} + \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{(-1)^n - 1}{\pi n^2}\cos(nt) + \frac{1}{n}(-1)^{n+1}\,\text{sen}(nt)\right) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{se } x = (2k+1)\pi,\ k \in \mathbb{Z} \\ f(x) & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

onde o valor em $x = (2k+1)\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ resulta de

$$\frac{f((2k+1)\pi^+) + f((2k+1)\pi^-)}{2} = \frac{0 + \pi}{2} = \frac{\pi}{2}.$$

10. Considere a equação diferencial parcial

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + x \frac{\partial u}{\partial x}, \quad (t,x) \in \mathbb{R}^2 \tag{3}$$

a) Sejam p e q duas funções de classe $\mathcal{C}^2$ definidas em $\mathbb{R}$. Mostre que a função

$$u(t,x) = p(xe^t) + q(xe^{-t}) \tag{4}$$

é solução de (3).

b) Baseando-se no resultado da alínea anterior determine a solução de (3) que satisfaz as seguintes condições iniciais:

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad u(0,x) = e^{-x^2}, \ \frac{\partial u}{\partial t}(0,x) = 0.$$

Resolução:

a) Atendendo a (4) tem-se

$$\begin{aligned}
u_t(t,x) &= p'(xe^t)xe^t - q'(xe^{-t})xe^{-t} \\
u_{tt}(t,x) &= p''(xe^t)x^2e^{2t} + p'(xe^t)xe^t + q''(xe^{-t})x^2e^{-2t} + q'(xe^{-t})xe^{-t} \\
u_x(t,x) &= p'(xe^t)e^t + q'(xe^{-t})e^{-t} \\
u_{xx}(t,x) &= p''(xe^t)e^{2t} + q''(xe^{-t})e^{-2t}
\end{aligned}$$

Substituindo na equação diferencial(3) esta toma a forma

$$\begin{aligned}
&p''(xe^t)x^2e^{2t} + p'(xe^t)xe^t + q''(xe^{-t})x^2e^{-2t} + q'(xe^{-t})xe^{-t} = \\
&= x^2 \cdot \left(p''(xe^t)e^{2t} + q''(xe^{-t})e^{-2t}\right) + x \cdot \left(p'(xe^t)e^t + q'(xe^{-t})e^{-t}\right)
\end{aligned}$$

que é obviamente identicamente satisfeita para todos os $(t,x) \in \mathbb{R}^2$.

b) Atendendo à alínea anterior pode-se escrever

$$\begin{aligned}
u(t,x) &= p(xe^t) + q(xe^{-t}) \\
\frac{\partial u}{\partial t}(t,x) &= xe^t p'(xe^t) - xe^{-t} q'(xe^{-t})
\end{aligned}$$

e portanto as condições iniciais dadas resultam em

$$\begin{aligned}
e^{-x^2} = u(0,x) &= p(x) + q(x) \\
0 = \frac{\partial u}{\partial t}(0,x) &= xp'(x) - xq'(x)
\end{aligned}$$

Da segunda equação conclui-se que $p'(x) = q'(x)$ e portanto $p(x) = q(x) + C$, onde C é uma constante real arbitrária. Substituindo na primeira equação tem-se a solução $q(x) = -\frac{1}{2}C + \frac{1}{2}e^{-x^2}$. A solução do problema de valores iniciais é, então, dada por

$$u(t,x) = \frac{1}{2}\left(e^{-x^2e^{2t}} + e^{-x^2e^{-2t}}\right).$$