Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

ANÁLISE MATEMÁTICA IV

2º Teste / 1º Exame

(LEA,LEB,LEC,LEGI,LEIC,LEMAT,LEM,LEMG,LEN,LEQ,LQ)

Justifique cuidadosamente todas as respostas.

Data: 23/06/2003, 9h00
Duração: Teste 1h30, Exame 3h00.

1. Seja $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por
$$u(x, y) = ax^2 + by^2 + cxy.$$
onde a, b, c são constantes reais.

   Para que valores das constantes a, b, e c é que u é a parte real de uma função analítica em $\mathbb{C}$? Para esses valores das constantes, determine uma função harmónica conjugada de u.

2. Considere a região de $\mathbb{C}$ definida por
$$R \stackrel{\text{def}}{=} \{z = x + iy : |x| < 2, 0 < y < 1\}.$$
Calcule
$$\int_{\partial R} \frac{dz}{(z^2 - 1)^2 + 3},$$
onde ∂R é o bordo de R percorrido uma vez em sentido directo.
(*Observação:* $\cos\frac{\pi}{3} = sen\,\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$, $\cos\frac{\pi}{6} = sen\,\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.)

3. Utilizando o Teorema dos Resíduos, mostre que
$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{3 + 2\cos t} dt = \frac{2\pi}{\sqrt{5}}.$$

4. Considere a função $f(z) = \dfrac{1}{\operatorname{sen} z}$. Determine o interior da região de convergência da série de Laurent centrada em $z_0 = 0$ e convergente no ponto $z = 3 + i4$.

5. Seja g uma função analítica em $\mathbb{C}$ e não constante. Mostre que os pólos da função
$$f(z) = \frac{g'(z)}{g(z)}$$
são todos de primeira ordem e calcule os respectivos resíduos.

6. Considere a equação diferencial

$$\left(\frac{y}{x} + \log y\right) + \left(\frac{x}{y} + \log x\right)\frac{dy}{dx} = 0.$$

   a) Mostre que esta equação é exacta.

   b) Determine uma expressão (eventualmente implícita) para a solução da equação que satisfaz a condição inicial $y(2) = 2$.

7. Determine a solução do problema de valores iniciais

$$\begin{cases} \boldsymbol{x}' = A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{h}(t) \\ \boldsymbol{x}(0) = (1,1)^T \end{cases}$$

   onde $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ e $\boldsymbol{h}(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ e^t \end{bmatrix}$

8. Determine a solução do problema de valores iniciais

$$\begin{cases} y'' - y' - 2y = 2\delta(t-2) \\ y(0) = y'(0) = 0 \end{cases}$$

   onde $\delta(t-2)$ designa a distribuição delta de Dirac no ponto 2.

9. Seja $f(t)$ o prolongamento 2π-periódico a todo o $\mathbb{R}$ da função $g(t)$ dada por

$$g(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } -\pi \leq t \leq 0 \\ t & \text{se } 0 < t < \pi \end{cases}$$

   Determine a série de Fourier de f e estude-a quanto à sua convergência pontual.

10. Considere a equação diferencial parcial

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + x\frac{\partial u}{\partial x}, \quad (t,x) \in \mathbb{R}^2 \tag{1}$$

   a) Sejam p e q duas funções de classe $\mathcal{C}^2$ definidas em $\mathbb{R}$. Mostre que a função

$$u(t,x) = p(xe^t) + q(xe^{-t}) \tag{2}$$

   é solução de (1).

   b) Baseando-se no resultado da alínea anterior determine a solução de (1) que satisfaz as seguintes condições iniciais:

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad u(0,x) = e^{-x^2}, \ \frac{\partial u}{\partial t}(0,x) = 0.$$