Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

# ANÁLISE MATEMÁTICA IV

2º Exame

(LEA,LEB,LEC,LEGI,LEIC,LEMAT,LEM,LEMG,LEN,LEQ,LQ)

*Justifique cuidadosamente todas as respostas.*

**Data:** 07/07/2003, 9h00
**Duração:** Exame 3h00.

1. Seja $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por
$$u\,(x, y) = \operatorname{sh}(ax)\operatorname{sen} y.$$
onde $a$ é uma constante real.

   Para que valores da constante $a$ é que $u$ é a parte real de uma função analítica em $\mathbb{C}$? Para esses valores da constante, determine uma função harmónica conjugada de $u$.

2. Considere a função $f(z) = \dfrac{1}{z(z+1)}$. Determine o desenvolvimento de $f$ em série de Laurent ( indicando a respectiva região de convergência) centrada em $z_0 = 0$, convergente em:

   (a) $z = \frac{1}{2}$.
   (b) $z = 2$.

3. Considere a região de $\mathbb{C}$ definida por
$$R \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ z \in \mathbb{C} : |z - \frac{1}{2}| < 1 \right\}.$$
Calcule
$$\int_{\partial R} \frac{1}{z^3 + 1}\, dz$$
onde $\partial R$ é o bordo de $R$ percorrido uma vez em sentido directo.

4. Utilizando o Teorema dos Resíduos, calcule
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(x^2 + 9)^2}\, dx.$$

5. Seja $a$ uma constante real e $f(t) = te^{at}$, definida para $t \geq 0$. Calcule a Transformada de Laplace de $f$, (designada por $\mathcal{L}(f)$ ), e verifique que:
$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C e^{zt} \mathcal{L}(f)(z)\, dz, \ \forall t > 0,$$
onde $C$ é um contorno fechado apropriado.

6. Determine a solução do problema de valores iniciais

$$\begin{cases} \boldsymbol{x}' = A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{h}(t) \\ \boldsymbol{x}(0) = (0,1,0)^T \end{cases}$$

onde $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ e $\boldsymbol{h}(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ e^t \\ -1 \end{bmatrix}$

7. Considere a equação diferencial

$$\left(2x^2 - yx\right) + \left(2yx - x^2\right)\frac{dy}{dx} = 0.$$

a) Mostre que esta equação é redutível a exacta com um factor integrante $\mu = \mu(x)$.

b) Determine a solução da equação que satisfaz a condição inicial $y(2) = 2$ e indique o intervalo máximo de definição da mesma.

8. Determine a solução do problema de valores iniciais

$$y'' - 4y' + 4y = \begin{cases} 0 & \text{se } 0 \leq \mathrm{t} \leq 1 \\ t-1 & \text{se } \mathrm{t} > 1 \end{cases}.$$

$$y(0) = 0,\ y'(0) = 1$$

9. Determine a solução do problema de valor inicial e condições de fronteira:

$$u_t = u_{xx} + 2u_x, \qquad (t,x) \in \mathbb{R}^+ \times ]0,\pi[$$

$$u(t,0) = 0, u(t,\pi) = 0 \qquad t \in \mathbb{R}^+,$$

$$u(0,x) = e^{-x}\left(\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} 2x\right) \qquad x \in ]0,\pi[.$$

10. Seja $F$ uma função estritamente crescente, duas vezes diferenciável e tal que $F(0) = 0$ e $F'(0) = 1$. Determine a solução do seguinte problema:

$$\ddot{y} = -F''(y)\dot{y}^3 \quad \text{com} \quad y(0) = 0 \quad \text{e} \quad \dot{y}(0) = 1.$$

**Sugestão:** Obtenha primeiro uma função $v$ tal que $\dot{y} = v(y)$.