Universidade Técnica de Lisboa

Instituto Superior Técnico

Departamento de Matemática

O princípio-h

Ricardo Joel Abrantes Andrade

Trabalho Final de Curso
Licenciatura em Matemática Aplicada e Computação

Orientadores:

Prof. Miguel Abreu
Prof. Rui Loja Fernandes

Agosto de 2005

Conteúdo

Introdução

Este trabalho pretende descrever alguns conceitos, métodos e resultados de cariz topológico em geometria, tendo um princípio geral, conhecido por *princípio-h*, como fio condutor. Mais precisamente, descreve-se como se podem obter alguns resultados geométricos (por exemplo, acerca da existência de estruturas simplécticas em variedades) por métodos topológicos ou como se podem descrever (ou, até certo ponto, mesmo classificar) topologicamente estruturas geométricas de determinado tipo. Além disso, como veremos, estes resultados serão em grande parte consequência do princípio-h.

O primeiro capítulo pretende constituir uma breve introdução aos métodos e aplicações do princípio-h. O princípio-h, quando válido, implica que secções não necessariamente holonómicas de um fibrado de jactos (de secções de algum fibrado sobre uma variedade) podem ser deformadas em secções holonómicas. Isto permite provar (usando métodos topológicos ou de teoria da homotopia) a existência de determinadas secções de fibrados sobre uma variedade. Em certos casos, estas secções determinam algum tipo de estrutura geométrica na variedade em questão e desta forma permitem mostrar a existência de uma tal estrutura sobre a variedade. Isto representa uma das possíveis aplicações interessantes do princípio-h.

O tema do segundo capítulo são as Γ-*estruturas*. O conceito de Γ-estrutura (ou mais precisamente o conceito mais particular de Γ-folheação) generaliza naturalmente o de folheação de uma variedade e permite também descrever de forma mais topológica (ao invés de uma descrição geométrica) vários tipos de estruturas geométricas em variedades, como por exemplo estruturas complexas e simplécticas. Esta descrição permite uma classificação das estruturas semelhante à existente para fibrados vectoriais (ou mais geralmente, fibrados principais). Além disso, veremos que um ingrediente fundamental na demonstração do teorema de classificação de Γ-folheações é um corolário dos resultados do primeiro capítulo (e na verdade um exemplo típico dos resultados que se obtêm com o princípio-h).

1. O PRINCÍPIO-h

Neste capítulo define-se rigorosamente o conceito de princípio-h e prova-se a sua validade em determinadas situações. Ainda neste capítulo são dadas algumas aplicações do princípio-h, por exemplo, à existência de alguns tipos de estruturas geométricas em variedades abertas e ao problema de classificação de imersões de variedades.

Existem várias abordagens para obter o princípio-h, entre as quais se contam os métodos dos feixes flexíveis (também conhecido por método do levantamento de homotopias — em inglês, *covering homotopy method*), da remoção de singularidades e da integração convexa. Nesta apresentação seguiremos a primeira abordagem. No entanto, os outros métodos são também importantes permitindo a demonstração de princípios-h mais apropriados para determinadas aplicações. Estas abordagens e outras são desenvolvidas em Gromov [3], que constitui uma referência muito exaustiva no tema do princípio-h, tanto no desenvolvimento abstracto do princípio-h como na descrição de aplicações. Outras referências bastante detalhadas e completas são os livros de Spring [19] (que expõe o método da integração convexa) e de Eliashberg e Mishachev [1] (que segue, na sua maior parte, uma abordagem alternativa recentemente desenvolvida conhecida como "aproximação holonómica", dando no final uma exposição do método da integração convexa. Além disso, este livro expõe um número significativo de aplicações em geometria). Existem, no entanto, outras exposições mais elementares descrevendo o método do levantamento de homotopias como a de Haefliger [7] ou a de Geiges [2] (que segue de perto o tratamento na referência anterior e dá ainda uma curta introdução ao método da integração convexa).

Na preparação deste capítulo as duas últimas referências foram importantes devido ao seu tratamento mais concreto do método de levantamento de homotopias e são seguidas em certos pontos. No entanto, a apresentação mais sofisticada e abstracta de Gromov [3] tem a vantagem de ser mais geral e fecunda, além de, na opinião do autor, permitir uma melhor compartimentação da exposição e (*a posteriori*) tornar mais claro em certos pontos quais os factores necessários ao funcionamento do método. A nossa exposição será, pois, próxima da de Gromov [3] e procuraremos ilustrar e motivar os vários resultados com alguns exemplos concretos, com vista a evidenciar a sua relação com as aplicações em vista.

1.1. **Definição do princípio-h.**

A história do princípio-h[1] começa com o trabalho de Smale (artigos [17] e [18]) na classificação de imersões de esferas em espaços Euclidianos. Este trabalho foi continuado e generalizado por Hirsch que provou o seguinte teorema:

1.1.1. Teorema (Smale-Hirsch)
Sejam M, N variedades suaves tais que M é aberta ou $\dim M < \dim N$. Qualquer morfismo de fibrados vectoriais $TM \to TN$ injectivo em cada fibra é homotópico (por uma homotopia de morfismos $TM \to TN$ injectivos em cada fibra) à derivada $df : TM \to TN$ de uma imersão suave $f : N \to M$.

[1] Para obter uma descrição mais detalhada da história do princípio-h, o leitor pode consultar o artigo de Spring [20].

Diz-se que uma variedade M é aberta se nenhuma componente conexa de $M \setminus \partial M$ é compacta (ou, equivalentemente, se qualquer componente de M é não compacta ou tem bordo não vazio).

O resultado acima é um corolário típico do princípio-h e nesta medida permite enquadrar e motivar a exposição que a seguir se faz do princípio-h. Antes de mais, reformulemos o teorema acima. Nas condições do teorema, consideremos o espaço das imersões $M \to N$ de classe C^1 com a topologia fraca-C^1 (também designada por topologia da convergência uniforme em compactos das funções e suas derivadas até ordem 1) que designamos por $\mathrm{Imm}(M, N)$. Além disso, seja $\mathrm{Mon}(TM, TN)$ o espaço dos morfismos (contínuos) de fibrados vectoriais $TM \to TN$ injectivos fibra a fibra com a topologia fraca-C^0 (a topologia fraca-C^0 é também designada por topologia compacta-aberta). Note-se que $\mathrm{Imm}(M, N) = \{f \in C^1(M, N) : df \in \mathrm{Mon}(TM, TN)\}$. Então o teorema 1.1.1 afirma que a aplicação:

$$\begin{aligned} d : \mathrm{Imm}(M, N) &\longrightarrow \mathrm{Mon}(M, N) \\ f &\longmapsto df \end{aligned}$$

é sobrejectiva nas componentes conexas por arcos.

Como veremos em breve, a noção de espaço de jactos permite enunciar o teorema acima de uma forma que torna natural a definição do princípio-h. Fazemos então uma pequena digressão para introduzir o conceito de espaço de jactos e expor algumas das suas propriedades que são necessárias no seguimento.

Seja $p : E \to B$ um fibrado suave (os fibrados são por definição localmente triviais; consideramos apenas fibrados em que a fibra é uma variedade sem bordo) sobre uma variedade suave (possivelmente com bordo) B. Seja $r \in \mathbb{N}$ e $\Gamma^r(E)$ o espaço das secções de classe C^r de $p : E \to B$ com a topologia fraca-C^r. Seja

$$E^{(r)} = \{(s, x) : x \in B,\ s \in \Gamma^r(E|_U) \text{ para alguma vizinhança } U \text{ de } x\}/\sim$$

onde $\sim$ é a relação de equivalência definida por: $(s, x) \sim (t, y)$ sse $s(x) = t(y)$ (o que implica $x = y$) e relativamente a algumas (e portanto quaisquer) cartas de B em torno de x e de E em torno de $s(x)$, as representações locais de s e de t têm derivadas iguais até ordem r (inclusivé). Assim $E^{(r)}$ é, informalmente, o conjunto das classes de equivalência de secções locais de E em torno de um ponto $x \in B$ que coincidem até às derivadas de ordem r no ponto x. $E^{(r)}$ designa-se por espaço de jactos-r do fibrado $p : E \to B$; dado (s, x) com $x \in B$ e s uma secção local de $p : E \to B$ definida numa vizinhança de x, a classe de equivalência de (s, x) em $E^{(r)}$ designa-se por $j^r_x(s)$, o jacto-r de s em x. Note-se que relativamente a cartas de B e de E, cada elemento $j^r_x(s) \in E(r)$ tem um representante canónico dado pelo polinómio de Taylor de ordem r de s em x e isto permite definir (naturalmente) uma estrutura diferencial em $E^{(r)}$. Além disso, $E^{(r)}$ tem uma projecção natural para B dada por:

$$\begin{aligned} p^r : E^{(r)} &\longrightarrow B \\ j^r_x(s) &\longmapsto x \end{aligned}$$

que é um fibrado suave para a estrutura diferencial em $E^{(r)}$. Dados $q, r \in \mathbb{N}$ com $r \geq q$ existe um fibrado natural $p^r_q : E^{(r)} \to E^{(q)}$ definido por:

$$\begin{aligned} p^r_q \colon E^{(r)} &\longrightarrow E^{(q)} \\ j^r_x(s) &\longmapsto j^q_x(s) \end{aligned}$$

Note-se que $E^{(0)}$ é naturalmente isomorfo a E enquanto fibrado sobre B, pelo que não os distinguimos, e que os fibrados acima verificam:

$$p \circ p^r_0 = p^r$$

$$p^s_t \circ p^r_s = p^r_t$$

para $r, t, s \in \mathbb{N}$ com $r \geq s \geq t$. Na verdade, $p^{r+1}_r : E^{(r+1)} \to E^{(r)}$ é naturalmente um fibrado afim (isto é, a fibra é difeomorfa a $\mathbb{R}^q$ para algum $q \in \mathbb{N}$ e as funções de transição do fibrado têm valores nas transformações afins de $\mathbb{R}^q$). No caso de $p : E \to B$ ser um fibrado vectorial então $p^1 : E^{(1)} \to B$ é naturalmente um fibrado vectorial.

Por outro lado, dados fibrados suaves $p : E \to B$, $p' : E' \to B'$ e um morfismo entre eles:

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "\widetilde{f}"] \arrow[d, "p"'] & E' \arrow[d, "p'"] \\ B \arrow[r, "f"] & B' \end{tikzcd}$$

tal que $f : B \to B'$ é um difeomorfismo sobre um aberto da imagem temos induzido para cada $r \in \mathbb{N}$ uma aplicação

$$\begin{aligned} \widetilde{f}^r : E^{(r)} &\longrightarrow (E')^{(r)} \\ j^r_x(s) &\longmapsto j^r_{f(x)}(\widetilde{f} \circ s \circ f^{-1}) \end{aligned}$$

que induz um morfismo entre os fibrados $E^{(r)} \to B$ e $(E')^{(r)} \to B'$. Na verdade, $\widetilde{f}^r$ induz um isomorfismo entre $E^{(r)}$ e $(E')^{(r)}|_{f(B)}$. Além disso, dados $r, s \in \mathbb{N}$ com $r \geq s$, temos que $(p')^r_s \circ \widetilde{f}^r = \widetilde{f}^s \circ p^r_s$.

É importante observar que uma secção $s \in \Gamma^r(E)$ ($r \in \mathbb{N}$) define uma secção $j^r(s) \in \Gamma^0(E^{(r)})$ de $p^r : E^{(r)} \to B$ — o jacto-r de s — dada por

$$j^r(s)(x) = j^r_x(s) \text{ para } x \in B$$

e que a aplicação:

$$\begin{aligned} j^r : \Gamma^r(E) &\longrightarrow \Gamma^0(E^{(r)}) \\ s &\longmapsto j^r(s) \end{aligned}$$

é contínua para as topologias fraca-C^r em $\Gamma^r(E)$ e compacta-aberta (ou seja, fraca-C^0) em $\Gamma^0(E^{(r)})$. Na verdade, j^r induz a topologia em $\Gamma^r(E)$, ou seja, j^r é um mergulho. Secções de $E^{(r)}$ na imagem de j^r, isto é, que são o jacto-r de alguma secção de E, dizem-se holonómicas.

Particularizando ao caso dos jactos-1, é fácil ver que um jacto $j^1_x(s)$ ($x \in B$) é univocamente descrito por $s(x)$ e $d_x s : T_x B \to T_{s(x)} E$ (note-se ainda que $d_{s(x)} p \circ d_x s = \mathrm{id}_{T_x B}$). Isto descreve uma bijecção entre a fibra $E^{(1)}_x =$

$(p^1)^{-1}(\{x\})$ de $E^{(1)}$ sobre $x \in B$ (dado um fibrado $X \to V$, a fibra do mesmo sobre $x \in V$ designa-se por X_x) e

$$\{(y, L) : y \in p^{-1}(\{x\}), L : T_xB \to T_yE \text{ é linear e } d_yp \circ L = \mathrm{id}_{T_xB}\}$$

No caso mais simples de termos o fibrado trivial $p : E := M \times N \to M =: B$ (dado pela projecção) onde M, N são variedades, podemos identificar naturalmente o último conjunto com

$$\{(y, L) : y \in N, L : T_xM \to T_yN \text{ é linear}\}$$

e portanto temos uma bijecção entre este conjunto e a fibra $E_x^{(1)}$ para $x \in M$. Esta bijecção (para cada $x \in B$) induz a seguinte bijecção (onde $\mathrm{Mor}(TM, TN)$ representa o espaço dos morfismos (contínuos) de fibrados vectoriais $TM \to TN$ com a topologia compacta-aberta):

$$\begin{aligned} H : \mathrm{Mor}(TM, TN) &\longrightarrow \Gamma^0(E^{(1)}) \\ f &\longmapsto s_f \end{aligned}$$

onde (para $f \in \mathrm{Mor}(TM, TN)$ e $x \in M$) $s_f(x)$ é o único jacto-1 $j^1_x(s) \in (p^1)^{-1}(\{x\})$ onde s é uma secção de classe C^1 de E definida numa vizinhança de x tal que $s(x) = (x, f(x))$ (consideramos M, N naturalmente incluídos nos seus fibrados tangentes) e $(d_{s(x)}q) \circ (d_xs) = f_x$ ($q : E = M \times N \to N$ é a projecção e f_x designa a restrição de f à fibra T_xM). H é na verdade um homeomorfismo que por definição faz o seguinte diagrama comutar

(1)
$$\begin{tikzcd} \Gamma^1(E) \arrow[r, "j^1"] & \Gamma^0(E^{(1)}) \\ C^1(M, N) \arrow[u, "i"', "\wr"] \arrow[r, "d"] & \mathrm{Mor}(TM, TN) \arrow[u, "H"', "\wr"] \end{tikzcd}$$

onde i é um homeomorfismo dado por:

$$\begin{aligned} i : C^1(M, N) &\longrightarrow \Gamma^1(E) \\ f &\longmapsto (\mathrm{id}_M, f) \end{aligned}$$

1.1.2. Definição
Dado um fibrado suave $p : E \to B$, uma relação diferencial *(de ordem r — com $r \in \mathbb{N}$) em E é um subconjunto $\mathcal{R}$ de $E^{(r)}$. Diz-se que uma secção $s \in \Gamma^r(E)$* satisfaz *a* relação *$\mathcal{R}$ (ou é uma* solução *de $\mathcal{R}$) se o jacto-r de s, $j^r(s)$, tem imagem em $\mathcal{R}$. O espaço de todas as soluções de $\mathcal{R}$ (com a topologia de subespaço de $\Gamma^r(E)$) designa-se por $\mathrm{Sol}^r(\mathcal{R})$. Designa-se ainda por $\Gamma^0(\mathcal{R})$ o subespaço de $\Gamma^0(E^{(r)})$ das secções de $E^{(r)}$ com imagem em $\mathcal{R}$ (observe-se que $\mathrm{Sol}^r(\mathcal{R}) = (j^r)^{-1}(\Gamma^0(\mathcal{R}))$. Equivalentemente, $\Gamma^0(\mathcal{R})$ é o espaço das secções de $p^r|_{\mathcal{R}} : \mathcal{R} \to B$. Finalmente, diz-se que a relação $\mathcal{R}$ é aberta (resp. fechada) se $\mathcal{R}$ for um subconjunto aberto (resp. fechado) de $E^{(r)}$.*

No caso anterior do fibrado trivial $E = M \times N$, podemos considerar a *relação de imersão*, $\mathcal{I} \subset E^{(1)}$ descrita da seguinte forma: a fibra da relação $\mathcal{I}_x = \mathcal{I} \cap E_x^{(1)}$, para $x \in M$, é constituída pelos pares (y, L) com $y \in N$ e $L : T_xM \to T_yN$ uma aplicação linear injectiva (nesta descrição identifica-se $E_x^{(1)}$ com $\{(y, L) : y \in N, L : T_xM \to T_yN \text{ é linear}\}$ pela bijecção estabelecida anteriormente). Para esta relação é fácil ver que (por definição da aplicação H presente no diagrama (1)) $H^{-1}(\Gamma^0(\mathcal{I})) = \mathrm{Mon}(TM, TN)$ e portanto que $i^{-1}(\mathrm{Sol}^1(\mathcal{I})) = \mathrm{Imm}(M, N)$. Em particular, do diagrama (1) obtemos um outro diagrama comutativo por restrição das aplicações naquele diagrama:

(2)
$$\begin{tikzcd} \mathrm{Sol}^1(\mathcal{I}) \arrow[r, "j^1"] & \Gamma^0(\mathcal{I}) \\ \mathrm{Imm}(M,N) \arrow[u, "i"', "\wr"] \arrow[r, "d"] & \mathrm{Mon}(TM,TN) \arrow[u, "H"', "\wr"] \end{tikzcd}$$

Em particular, o teorema de Smale-Hirsch é equivalente a dizer que a aplicação (obtida por restrição de j^1 e a que damos o mesmo nome):

$$j^1 : \mathrm{Sol}^1(\mathcal{I}) \longrightarrow \Gamma^0(\mathcal{I})$$

é sobrejectiva nas componentes conexas por arcos. Por definição, isto é equivalente a $\mathcal{I}$ satisfazer o princípio-h.

1.1.3. Definição (princípio-h[2])
Uma relação $\mathcal{R}$ de ordem r ($r \in \mathbb{N}$) num fibrado suave $p : E \to B$ satisfaz o princípio-h *se $j^r : \mathrm{Sol}^r(\mathcal{R}) \to \Gamma^0(\mathcal{R})$ é sobrejectiva nas componentes conexas por arcos (ou equivalentemente, se qualquer secção em $\Gamma^0(\mathcal{R})$ é homotópica em $\Gamma^0(\mathcal{R})$ a uma secção holonómica — que necessariamente estará em $\Gamma^0(\mathcal{R})$ e será então o jacto-r de uma secção em $\mathrm{Sol}^r(\mathcal{R})$).*

Podemos também definir um princípio-h paramétrico que obviamente implica o princípio-h.

1.1.4. Definição (princípio-h paramétrico)
Uma relação $\mathcal{R}$ de ordem r ($r \in \mathbb{N}$) num fibrado $p : E \to B$ satisfaz o princípio-h paramétrico *se $j^r : \mathrm{Sol}^r(\mathcal{R}) \to \Gamma^0(\mathcal{R})$ é uma equivalência de homotopia fraca (ou seja, induz bijecções em todos os grupos de homotopia para qualquer escolha do ponto de base em $\mathrm{Sol}^r(\mathcal{R})$). Equivalentemente (observe-se que $j^r : \Gamma^r(E) \to \Gamma^0(E^{(r)})$ é um mergulho), $\mathcal{R}$ satisfaz o princípio-h paramétrico sse a inclusão em $\Gamma^0(\mathcal{R})$ do seu subespaço formado pelas secções holonómicas é uma equivalência de homotopia fraca.*

1.1.5. Observação
Na verdade, o princípio-h paramétrico implica que $j^r : \mathrm{Sol}^r(\mathcal{R}) \to \Gamma^0(\mathcal{R})$ é uma equivalência de homotopia no caso de a relação diferencial $\mathcal{R}$ ser uma subvariedade de $E^{(r)}$ e a restrição $p^r|_{\mathcal{R}} : \mathcal{R} \to B$ ser uma submersão. De facto, nestas condições, tanto $\mathrm{Sol}^r(\mathcal{R})$ como $\Gamma^0(\mathcal{R})$ são variedades-Fréchet metrizáveis e portanto têm o tipo de homotopia de um complexo-CW (ver Palais [15]*) pelo que uma equivalência de homotopia fraca entre aqueles dois espaços é necessariamente uma equivalência de homotopia (teorema de Whitehead).*

Embora neste trabalho se prove sempre a validade do princípio-h paramétrico e este seja mais forte que o princípio-h (usual), é relevante referir que o que é usualmente utilizado nas aplicações concretas é apenas o princípio-h

[2] A designação princípio-h constitui uma abreviatura de *princípio de homotopia* (em inglês, *homotopy principle*).

(sobrejectividade em π_0) ou ainda a injectividade em π_0 de $j^r : \mathrm{Sol}^r(\mathcal{R}) \to \Gamma^0(\mathcal{R})$ (nas condições da definição acima).

Nas duas secções seguintes ver-se-ão alguns teoremas gerais que são úteis para provar a validade do princípio-h (em determinadas condições) — estes teoremas usam o formalismo dos feixes flexíveis. No entanto, antes disso, parece relevante introduzir alguns dos conceitos e argumentos importantes de forma mais concreta. Sendo assim, o final desta secção é dedicado a dar uma demonstração geométrica do princípio-h (para certas relações diferenciais em fibrados sobre variedades abertas). Esta demonstração segue de perto o método originalmente usado por Smale na sua prova do princípio-h para a relação de imersão (para o caso particular de imersões de esferas em espaços Euclidianos). Além disso, é muito próxima da demonstração do princípio-h dada em Haefliger [7] e em Geiges [2]. Na verdade, nesta secção, tentar-se-ão abstrair as propriedades formais necessárias para fazer uma demonstração do princípio-h semelhante à apresentada nestas duas últimas referências, tentando para isso colocá-las num contexto mais adequado (na medida em que as propriedades necessárias se obtêm de modo formal, nalgum sentido). Na secção 1.4 de [3], Gromov propõe uma maneira de formalizar isto. No entanto, a incapacidade do autor do presente texto em justificar os argumentos aí desenvolvidos no formalismo dos espaços quasi-topológicos (apresentado naquele livro) levou-o a formalizar a teoria na categoria mais geral dos pré-feixes sobre a categoria dos espaços topológicos em que os argumentos são válidos virtualmente inalterados. Assim, definimos um espaço quasi-topológico (contrariamente à definição em Gromov [3]) como um pré--feixe sobre a categoria dos espaços topológicos.

1.1.6. Definição
Um pré-feixe *sobre uma categoria C é um functor contravariante $C \to \mathcal{S}et$ (onde $\mathcal{S}et$ é a categoria dos conjuntos), isto é, um elemento de $\mathcal{S}et^{C^{\mathrm{op}}}$ (C^{op} é a categoria oposta de C). A categoria dos pré-feixes sobre C é a categoria de functores $\mathcal{S}et^{C^{\mathrm{op}}}$. Observe-se que se tem o mergulho de Yoneda $C \to \mathcal{S}et^{C^{\mathrm{op}}}$, cuja acção nos objectos de C é dada por: $c \longmapsto \mathrm{Hom}_C(-, c)$.*

1.1.7. Definição
A categoria dos espaços quasi-topológicos *é a categoria $\mathcal{S}et^{\mathcal{T}op^{\mathrm{op}}}$ dos pré-feixes sobre $\mathcal{T}op$ ($\mathcal{T}op$ é a categoria dos espaços topológicos). Designa-se por $Y : \mathcal{T}op \to \mathcal{S}et^{\mathcal{T}op^{\mathrm{op}}}$ o mergulho de Yoneda (observe-se que Y preserva todos os limites). Dado um espaço topológico X, chama-se a $Y(X)$ o espaço quasi--topológico associado a X.*

1.1.8. Observação
Pelo lema de Yoneda, o mergulho de Yoneda $Y : \mathcal{T}op \to \mathcal{S}et^{\mathcal{T}op^{\mathrm{op}}}$ é cheio pelo que o conjunto dos morfismos entre os espaços quasi-topológicos associados a dois espaços topológicos é naturalmente isomorfo ao conjunto das funções contínuas entre os espaços topológicos.

No seguimento, o termo espaço será usado unicamente para designar espaços topológicos. As referências a espaços quasi-topológicos serão explícitas e farão uso deste termo.

A vantagem de trabalhar na categoria dos pré-feixes sobre $\mathcal{Top}$ é que os colimites em $\mathcal{Set}^{\mathcal{Top}^{\mathrm{op}}}$ têm propriedades vantajosas. Uma das propriedades mais úteis é a seguinte (ver Mac Lane [13], secção V.3 — observe-se que as afirmações duais também são válidas):

1.1.9. Proposição
Dados uma categoria C e um diagrama $D : J \to \mathcal{Set}^{C^{\mathrm{op}}}$ (isto é, um functor de uma categoria pequena J para $\mathcal{Set}^{C^{\mathrm{op}}}$), $\operatorname{colim} D$ *existe (resp.* $\lim D$ *existe) e é naturalmente isomorfo ao pré-feixe*

$$C \ni p \mapsto \operatorname*{colim}_{j \in J}((D(j))(p))$$

(esta é a sua acção nos objectos) (resp. $C \ni p \mapsto \lim_{j\in J}((D(j))(p))$). Informalmente, os colimites (resp. limites) em categorias de pré-feixes (e em particular na categoria dos espaços quasi-topológicos) existem e podem ser calculados ponto a ponto.

Dado um fibrado suave $p : E \to B$ e um subconjunto A de B, define-se o espaço (quasi-topológico) de secções de E sobre $\mathcal{O}p\, A$:

$$\Gamma^r(E|\mathcal{O}p\, A) := \operatorname*{colim}_{U \text{ viz de } A} Y(\Gamma^r(E|U))$$

(onde $r \in \mathbb{N}$ e, para um aberto U de B, $\Gamma^r(E|U)$ designa o espaço das secções de classe C^r de E sobre U com a topologia fraca-C^r) sendo o colimite tomado em $\mathcal{Set}^{\mathcal{Top}^{\mathrm{op}}}$ relativamente às aplicações "naturais" induzidas por restrição de secções. Observe-se que $\mathcal{O}p\, A$ não está definido; apenas "o espaço de secções de E sobre $\mathcal{O}p\, A$", o qual se pode conceber informalmente como o espaço das secções de E em vizinhanças arbitrariamente pequenas de A.

Um caso particular da definição acima é o espaço de secções $\Gamma^0(E^{(r)}|\mathcal{O}p\, A)$ para um fibrado suave $p : E \to B$, $r \in \mathbb{N}$ e $A \subset B$. Observe-se agora que dado um aberto U de B podemos tomar o jacto de secções sobre U o que induz uma aplicação contínua $j^r : \Gamma^r(E|U) \to \Gamma^0(E^{(r)}|U)$. Assim, dada uma relação diferencial de ordem $r \in \mathbb{N}$ em E, podemos definir o espaço das soluções de $\mathcal{R}$ sobre U:

$$\mathrm{Sol}^r(\mathcal{R}|U) := (j^r)^{-1}(\Gamma^0(\mathcal{R}|U))$$

com a topologia de subespaço de $\Gamma^r(E|U)$ (onde o espaço das secções de $\mathcal{R}$ sobre U, $\Gamma^0(\mathcal{R}|U)$, é o subespaço de $\Gamma^0(E^{(r)}|U)$ definido da forma óbvia). j^r restringe a uma aplicação:

$$j^r : \mathrm{Sol}^r(\mathcal{R}|U) \longrightarrow \Gamma^0(\mathcal{R}|U)$$

Podemos agora definir como antes os espaços de secções e soluções de $\mathcal{R}$ sobre $\mathcal{O}p\, A$ (dado $A \subset B$):

$$\Gamma^0(\mathcal{R}|\mathcal{O}p\, A) := \operatorname*{colim}_{U \text{ viz de } A} Y(\Gamma^0(\mathcal{R}|U))$$

$$\mathrm{Sol}^r(\mathcal{R}|\mathcal{O}p\, A) := \operatorname*{colim}_{U \text{ viz de } A} Y(\mathrm{Sol}^r(\mathcal{R}|U))$$

sendo os colimites tomados relativamente às aplicações de restrição nos espaços de secções/soluções. Observe-se que se U é um aberto de B então $\Gamma^0(\mathcal{R}|\mathcal{O}p\, U) = Y(\Gamma^0(\mathcal{R}|U))$ (e analogamente para o espaço de soluções sobre $\mathcal{O}p\, U$). Finalmente, observe-se também que as aplicações $j^r : \mathrm{Sol}^r(\mathcal{R}|U) \to$

$\Gamma^0(\mathcal{R}|U)$ para as vizinhanças U de A induzem (passando ao colimite) um morfismo:

$$j^r : \mathrm{Sol}^r(\mathcal{R}|\mathcal{O}p\, A) \longrightarrow \Gamma^0(\mathcal{R}|\mathcal{O}p\, A)$$

A vantagem em definir estes espaços de secções sobre $\mathcal{O}p\, A$ reside nas propriedades (de demonstração fácil) enunciadas a seguir.

1.1.10. Observação
No seguimento segue-se (para efeitos de simplificação) a convenção de identificar um espaço topológico X com o espaço quasi-topológico, $Y(X)$, associado a X (o lema de Yoneda permite fazer esta identificação sem causar confusão). Esta identificação permite estender por analogia a espaços quasi-topológicos a definição de certos conceitos como por exemplo o de fibração de Serre. Além disso, esta identificação implica que todas as definições e proposições para espaços quasi-topológicos se aplicam a espaços topológicos.

Note-se apenas que, como o mergulho de Yoneda não preserva colimites, é importante saber em que categoria os colimites são tomados. Por defeito, e excepto referência em contrário, os colimites em $\mathcal{T}op$ (e em $\mathcal{S}et^{\mathcal{T}op^{\mathrm{op}}}$) serão tomados em $\mathcal{S}et^{\mathcal{T}op^{\mathrm{op}}}$.

1.1.11. Proposição
Seja $D : J \to \mathcal{S}et^{\mathcal{T}op^{\mathrm{op}}}$ um diagrama pequeno em $\mathcal{S}et^{\mathcal{T}op^{\mathrm{op}}}$ (isto é, J é uma categoria pequena e D é um functor). Então para qualquer espaço topológico X

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{S}et^{\mathcal{T}op^{\mathrm{op}}}}(X, \operatorname{colim} D) = \operatorname*{colim}_{p\in J} \left(\mathrm{Hom}_{\mathcal{S}et^{\mathcal{T}op^{\mathrm{op}}}}(X, D(p))\right)$$

Em particular (note-se que o colimite da direita é tomado em $\mathcal{S}et$), se $f : X \to \operatorname{colim} D$ é um morfismo então existe um morfismo $\widetilde{f} : X \to D(p)$ para algum objecto p de J tal que $p \circ \widetilde{f} = f$ (onde $p : D(p) \to \operatorname{colim} D$ é a aplicação natural para o colimite). A um tal morfismo $\widetilde{f}$ chama-se um levantamento *de f.*

Demonstração. Esta proposição segue imediatamente da proposição 1.1.9 e do lema de Yoneda:

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}_{\mathcal{S}et^{\mathcal{T}op^{\mathrm{op}}}}(X, \operatorname{colim} D) &= (\operatorname{colim} D)(X)\\ &= \operatorname*{colim}_{p\in J}((D(p))(X))\\ &= \operatorname*{colim}_{p\in J}\left(\mathrm{Hom}_{\mathcal{S}et^{\mathcal{T}op^{\mathrm{op}}}}(X, D(p))\right)\end{aligned}$$

■

Esta proposição tem o seguinte corolário imediato.

1.1.12. Proposição
Sejam $p : E \to B$ um fibrado suave, $A \subset B$, X um espaço topológico e $r \in \mathbb{N}$. Então

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{S}et^{\mathcal{T}op^{\mathrm{op}}}}(X, \Gamma^r(E|\mathcal{O}p\, A)) = \operatorname*{colim}_{U \text{ viz de } A}(\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}op}(X, \Gamma^0(\mathcal{R}|U))$$

Em particular, se $f : X \to \Gamma^r(E|\mathcal{Op}\, A)$ é um morfismo então existe U vizinhança de A em B e uma aplicação contínua $\widetilde{f} : X \to \Gamma^r(E|U)$ (um levantamento *de f) tal que $f = q \circ \widetilde{f}$ (onde $q : Y(\Gamma^r(E|U)) \to \Gamma^r(E|\mathcal{Op}\, A)$ é a aplicação natural para o colimite). Afirmações análogas valem para os espaços de secções/soluções de uma relação diferencial $\mathcal{R}$ em E.*

1.1.13. Proposição
Se $p : E \to B$ é um fibrado suave, $r \in \mathbb{N}$ e A_1, A_2 são subconjuntos fechados de B (ou mais geralmente A_1, A_2 são subconjuntos de B fechados em $A_1 \cup A_2$) então o diagrama seguinte (onde todas as aplicações são induzidas por restrição de secções)

$$\begin{array}{ccc} \Gamma^r(E|\mathcal{Op}\,(A_1 \cup A_2)) & \longrightarrow & \Gamma^r(E|\mathcal{Op}\,(A_1)) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \Gamma^r(E|\mathcal{Op}\,(A_2)) & \longrightarrow & \Gamma^r(E|\mathcal{Op}\,(A_1 \cap A_2)) \end{array}$$

é um diagrama de pullback na categoria dos espaços quasi-topológicos. Da mesma forma, o diagrama análogo para os espaços de secções de $\mathcal{R}$ (resp. para os espaços de soluções de $\mathcal{R}$) é também um diagrama de pullback para uma relação diferencial $\mathcal{R}$ em E.

Demonstração. É apenas necessário fazer a verificação "ponto a ponto" (ver proposição 1.1.9 — aplicar a diagramas "quadrados"), isto é, basta mostrar que para cada espaço topológico X:

$$\begin{array}{ccc} \Gamma^r(E|\mathcal{Op}\,(A_1 \cup A_2))(X) & \longrightarrow & \Gamma^r(E|\mathcal{Op}\,(A_1))(X) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \Gamma^r(E|\mathcal{Op}\,(A_2))(X) & \longrightarrow & \Gamma^r(E|\mathcal{Op}\,(A_1 \cap A_2))(X) \end{array}$$

é um diagrama de pullback. No entanto (novamente pela proposição 1.1.9 e pelo lema de Yoneda), sabemos que isto é o mesmo que verificar que

$$\begin{array}{ccc} \operatorname*{colim}_{U \text{ viz de } A_1 \cup A_2} \operatorname{Hom}(X, \Gamma^r(E|U)) & \longrightarrow & \operatorname*{colim}_{U \text{ viz de } A_1} \operatorname{Hom}(X, \Gamma^r(E|U)) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \operatorname*{colim}_{U \text{ viz de } A_2} \operatorname{Hom}(X, \Gamma^r(E|U)) & \longrightarrow & \operatorname*{colim}_{U \text{ viz de } A_1 \cap A_2} \operatorname{Hom}(X, \Gamma^r(E|U)) \end{array}$$

é um diagrama de pullback para cada espaço topológico X, o que se verifica directamente de forma elementar. ■

O próximo objectivo é definir um princípio-h local que é importante na medida em que sob certas condições é possível reduzir o princípio-h sobre um aberto ao princípio-h local sobre um conjunto mais pequeno. Como veremos, esta propriedade (de localização do princípio-h) é usada frequentemente nas demonstrações. Para definir o princípio-h local é necessário definir primeiro o conceito de equivalência fraca entre espaços quasi-topológicos. Com vista a isso, convém primeiro definir o conceito de homotopia.

1.1.14. Definição
Uma homotopia *entre dois morfismos $f, g : X \to Z$ em $\mathcal{Set}^{\mathcal{Top}^{op}}$ é uma aplicação $H : X \times [0,1] \to Z$ tal que $H \circ i_0 = f$, $H \circ i_1 = g$ (onde* $i_t = (\mathrm{id}_X, c_t)$

para $t \in \{0,1\}$, com $c_t : X \to [0,1]$ dado pela composta

$$X \longrightarrow * \xrightarrow{*_t} [0,1]$$

onde $*_t$ é a aplicação com imagem igual a $\{t\}$).

1.1.15. Definição
Um ponto *de um espaço quasi-topológico X é um morfismo $* \to X$ (onde $*$ é um espaço topológico singular — que é um objecto terminal de $\mathcal{S}et^{\mathcal{T}op^{\mathrm{op}}}$). Um* espaço quasi-topológico pontuado *é um par (X, x) em que X é um espaço quasi-topológico e $x : * \to X$ é um ponto de X. Dados dois espaços quasi-topológicos pontuados, (X, x)* e *(Z, z), um* morfismo pontuado, *$f : (X, x) \to (Z, z)$,* de *(X, x)* para *(Z, z), é um morfismo $f : X \to Z$ tal que $f \circ x = z$. Isto permite definir a categoria $\mathcal{S}et_*^{\mathcal{T}op^{\mathrm{op}}}$ dos espaços quasi-topológicos pontuados. Uma* homotopia pontuada *$H : (X, x) \times [0,1] \to (Z, z)$ entre dois morfismos pontuados $f, g : (X, x) \to (Z, z)$ é uma homotopia $H : X \times [0,1] \to Z$ entre os morfismos $f, g : X \to Z$ em $\mathcal{S}et^{\mathcal{T}op^{\mathrm{op}}}$ tal que $H \circ (c_x, \mathrm{id}_{[0,1]}) = c_z$ (onde $c_x : [0,1] \to X$ é dado pela composta*

$$[0,1] \longrightarrow * \xrightarrow{x} X$$

e analogamente para c_z).

Com vista a definir o conceito de equivalência fraca, o objectivo agora seria definir grupos de homotopia de espaços quasi-topológicos. No entanto, a relação de homotopia não é uma relação de equivalência em geral para espaços quasi-topológicos devido à impossibilidade de "colar" morfismos entre espaços quasi-topológicos como se pode fazer para funções contínuas. Sendo assim, é necessário definir uma subcategoria adequada de $\mathcal{S}et^{\mathcal{T}op^{\mathrm{op}}}$ em que isto seja possível.

1.1.16. Definição
Seja $c\mathcal{T}op$ a subcategoria cheia de $\mathcal{S}et^{\mathcal{T}op^{\mathrm{op}}}$ cujos objectos são os espaços quasi-topológicos X tais que existe um único morfismo $\emptyset \to X$ e tais que para qualquer diagrama de pushout em $\mathcal{T}op$

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "i_B"] \arrow[d, "i_C"'] & B \arrow[d, "j_B"] \\ C \arrow[r, "j_C"] & D \end{tikzcd}$$

e quaisquer morfismos $f_B : B \to X$, $f_C : C \to X$ tais que $f_B \circ i_B = f_C \circ i_C$ existe um único morfismo $f : D \to X$ tal que $f \circ j_B = f_B$ e *$f \circ j_C = f_C$. Visto que $c\mathcal{T}op$ é uma subcategoria cheia de $\mathcal{S}et^{\mathcal{T}op^{\mathrm{op}}}$, os morfismos em $c\mathcal{T}op$ entre dois objectos de $c\mathcal{T}op$ são os morfismos entre aqueles objectos em $\mathcal{S}et^{\mathcal{T}op^{\mathrm{op}}}$. Sendo assim, referir-nos-emos apenas a morfismos sem referência à categoria ($c\mathcal{T}op$ ou $\mathcal{S}et^{Top^{\mathrm{op}}}$) em que os consideramos.*

A categoria $c\mathcal{T}op_*$ é a subcategoria cheia de $\mathcal{S}et_*^{\mathcal{T}op^{\mathrm{op}}}$ (a categoria dos espaços quasi-topológicos pontuados) constituída pelos espaços quasi-topológicos pontuados (X, x) com $X \in c\mathcal{T}op$.

1.1.17. Observação
Observe-se que (pela definição acima e pelo lema de Yoneda) um espaço quasi-topológico $Y \in \mathcal{S}et^{\mathcal{T}op^{\mathrm{op}}}$ *está em* $c\mathcal{T}op$ *sse for um functor contravariante* $\mathcal{T}op \to \mathcal{S}et$ *que leva pushouts em pullbacks e tal que* $Y(\emptyset)$ *é singular. Na verdade (como se conclui usando o lema de Yoneda e a proposição 1.1.19 à frente) tem-se que se* $Y \in c\mathcal{T}op$ *então* Y *leva colimites finitos em limites finitos (enquanto functor contravariante* $\mathcal{T}op \to \mathcal{S}et$*).*

É imediato da definição que $\mathcal{T}op$ é uma subcategoria cheia de $c\mathcal{T}op$. A seguinte proposição também segue facilmente da definição (a sua demonstração é deixada ao cuidado do leitor).

1.1.18. Proposição
A categoria $c\mathcal{T}op$ *é completa e a inclusão em* $\mathcal{S}et^{\mathcal{T}op^{\mathrm{op}}}$ *preserva limites. Dito de outra forma, os limites em* $\mathcal{S}et^{\mathcal{T}op^{\mathrm{op}}}$ *de elementos de* $c\mathcal{T}op$ *estão em* $c\mathcal{T}op$*.*

A vantagem de trabalhar na subcategoria $c\mathcal{T}op$ de $\mathcal{S}et^{\mathcal{T}op^{\mathrm{op}}}$ reside na propriedade seguinte (que generaliza a propriedade de colagem de aplicações contínuas entre espaços topológicos).

1.1.19. Proposição
A inclusão de $\mathcal{T}op$ *em* $c\mathcal{T}op$ *(com* $n \in \mathbb{N}$*) preserva colimites finitos.*

Demonstração. Da definição segue imediatamente que $\emptyset$ é um objecto inicial em $c\mathcal{T}op$ e que a inclusão de $\mathcal{T}op$ em $c\mathcal{T}op$ preserva pushouts. Assim conclui-se que a inclusão de $\mathcal{T}op$ em $c\mathcal{T}op$ preserva coigualadores e (por indução) coprodutos finitos. Desta forma, a conclusão pretendida segue. ■

A proposição seguinte (extremamente útil no seguimento) é um corolário imediato da proposição anterior. Por simplificação, dados um espaço topológico X, $Z \in \mathcal{S}et^{\mathcal{T}op^{\mathrm{op}}}$ e um morfismo $f : X \to Z$, designa-se por $f|_A$ (restrição de f a A) a composta de f com a inclusão de um subespaço A de X.

1.1.20. Proposição
Dada uma cobertura fechada (resp. aberta) finita, $\mathcal{C}$*, de um espaço topológico* X*, tem-se que* X *é o colimite em* $c\mathcal{T}op$ *da inclusão do conjunto parcialmente ordenado* $\mathcal{C} \cup \{A \cap B : A, B \in \mathcal{C}\}$ *(a ordem parcial neste conjunto é dada pelas inclusões* $A \cap B \to A$ *para* $A, B \in \mathcal{C}$*) em* $c\mathcal{T}op$ *(esta inclusão é um functor). De forma equivalente, dados* $Z \in c\mathcal{T}op$ *e morfismos* $f_A : A \to Z$ *para* $A \in \mathcal{C}$ *tais que* $f_A|_{A\cap B} = f_B|_{A\cap B}$ *para* $A, B \in \mathcal{C}$*, existe um único morfismo* $f : X \to Z$ *tal que* $f|_A = f_A$ *para* $A \in \mathcal{C}$ *(a* f *chama-se* a colagem *dos* f_A*'s para* $A \in \mathcal{C}$*).*

Outra propriedade fundamental da categoria $c\mathcal{T}op$ é a de ser fechada para colimites dirigidos (que, por convenção, são tomados em $\mathcal{S}et^{\mathcal{T}op^{\mathrm{op}}}$).

1.1.21. Observação
O colimite de um functor $J \to C$ *(*C *uma categoria completa) diz-se dirigido se a categoria* J *for dirigida (ver Mac Lane* [13]*, capítulo IX — aquilo que neste texto se designa por "dirigido" é designado em Mac Lane* [13] *por "filtered"), isto é:*

- *dados* $p, q \in J$*, existe* $r \in J$ *e morfismos* $p \to r$ *e* $q \to r$*.*

- *dados $p, q \in J$ e morfismos $f, g : p \to q$ existe $r \in J$ e um morfismo $h : q \to r$ tais que $h \circ f = h \circ g$.*

A vantagem dos colimites dirigidos (em $\mathcal{S}et$) consiste no seu modelo simplificado: se J é uma categoria pequena dirigida e $D : J \to \mathcal{S}et$ é um functor então:

$$\operatorname{colim} D = \Big(\coprod_{p \in J} D(p) \Big) / \sim$$

onde $\sim$ é a relação de equivalência dada por: $a \sim a'$ (para $a \in D(p)$, $a' \in D(p')$ com $p, p' \in J$) sse existem $q \in J$ e morfismos $u : p \to q$, $u' : p' \to q$ tais que $D(u)(a) = D(u')(a')$ (isto define uma relação de equivalência pois a categoria J é dirigida).

1.1.22. Proposição

Dado um diagrama $D : J \to c\mathcal{T}op$ com J pequena e dirigida, o colimite de D em $c\mathcal{T}op$ existe e é igual ao colimite de $i \circ D$ ($i : c\mathcal{T}op \to \mathcal{S}et^{\mathcal{T}op^{\mathrm{op}}}$ é a inclusão) em $\mathcal{S}et^{\mathcal{T}op^{\mathrm{op}}}$. Dito de outra forma, os colimites dirigidos (pequenos) em $\mathcal{S}et^{\mathcal{T}op^{\mathrm{op}}}$ de elementos de $c\mathcal{T}op$ estão em $c\mathcal{T}op$.

Demonstração. Suponhamos que $Z = \operatorname{colim}(i \circ D)$ (sendo o colimite tomado em $\mathcal{S}et^{\mathcal{T}op^{\mathrm{op}}}$) onde $D : J \to c\mathcal{T}op$ é um functor e J é uma categoria dirigida pequena. É imediato que $Z(\emptyset)$ é singular. Sejam agora dados um diagrama de pushout em $\mathcal{T}op$

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "i_B"] \arrow[d, "i_A"'] & B \arrow[d, "j_B"] \\ A \arrow[r, "j_A"] & X \end{tikzcd}$$

e morfismos $f_A : B \to Z$, $f_B : B \to Z$ tais que $f_A \circ i_A = f_B \circ i_B$. Pela proposição 1.1.11 temos levantamentos $\widetilde{f_A} : A \to D(p)$ e $\widetilde{f_B} : B \to D(q)$ com $p, q \in J$ e estes levantamentos verificam $\alpha_p \circ \widetilde{f_A} \circ i_A = \alpha_q \circ \widetilde{f_B} \circ i_B$ (onde, para $r \in J$, $\alpha_r : D(r) \to \operatorname{colim} D$ é o morfismo natural para o colimite). Assim, os morfismos $\widetilde{f_A} \circ i_A : C \to D(p)$ e $\widetilde{f_B} \circ i_B : C \to D(q)$ representam o mesmo elemento em

(3) $$\operatorname*{colim}_{p \in J} \big(\mathrm{Hom}_{\mathcal{S}et^{\mathcal{T}op^{\mathrm{op}}}}(C, D(p)) \big) \quad \big(= \mathrm{Hom}_{\mathcal{S}et^{\mathcal{T}op^{\mathrm{op}}}}(C, \operatorname{colim}(i \circ D)) \big)$$

(pois representam o mesmo morfismo $\alpha_p \circ \widetilde{f_A} \circ i_A = \alpha_q \circ \widetilde{f_B} \circ i_B : C \to Z$ no termo entre parêntesis). Desta forma, a observação 1.1.21 (nomeadamente a fórmula explícita aí dada para um colimite dirigido — que neste caso aplicamos a calcular o colimite (3)) permite-nos concluir que existem $r \in J$ e morfismos $u : p \to r$, $v : q \to r$ tais que $D(u) \circ \widetilde{f_A} \circ i_A = D(v) \circ \widetilde{f_B} \circ i_B$. Assim, tem-se que $D(r) \in c\mathcal{T}op$ e $D(u) \circ \widetilde{f_A} : A \to D(r)$, $D(v) \circ \widetilde{f_B} : B \to D(r)$ são morfismos em $c\mathcal{T}op$ tais que $D(u) \circ \widetilde{f_A} \circ i_A = D(v) \circ \widetilde{f_B} \circ i_B$. Desta forma, existe um morfismo único $\widetilde{f} : X \to D(r)$ tal que $\widetilde{f} \circ j_A = D(u) \circ \widetilde{f_A}$ e $\widetilde{f} \circ j_B = D(v) \circ \widetilde{f_B}$. O morfismo $f := \alpha_r \circ \widetilde{f} : X \to Z = \operatorname{colim}(i \circ D)$ verifica então $f \circ j_A = f_A$ e $f \circ j_B = f_B$. A unicidade deste morfismo segue da unicidade de $\widetilde{f}$ como acima para quaisquer levantamentos $\widetilde{f_A}$ e $\widetilde{f_B}$ (é também necessário usar novamente a proposição 1.1.11 e a observação

1.1.21) — os pormenores da demonstração de unicidade são deixados ao cuidado do leitor. ■

1.1.23. Observação
Esta proposição implica em particular que para um fibrado suave $p : E \to B$ *e uma relação diferencial de ordem* $r \in \mathbb{N}$ *em* E*, se tem que* $\mathrm{Sol}^r(\mathcal{R}|\mathcal{O}p\,A)$ *e* $\Gamma^0(\mathcal{R}|\mathcal{O}p\,A)$ *estão em* $c\mathcal{T}op$ *para qualquer* $A \subset B$.

Estas propriedades de $c\mathcal{T}op$ (nomeadamente o facto de a inclusão de $\mathcal{T}op$ em $c\mathcal{T}op$ preservar colimites finitos, o que nos permite colar morfismos de espaços topológicos para elementos de $c\mathcal{T}op$) permitem-nos então definir (da forma usual) conjuntos de classes de homotopia de morfismos entre espaços pontuados e grupos de homotopia de elementos de $c\mathcal{T}op$.

1.1.24. Definição
Sejam (X, x) *um espaço topológico pontuado e* $(Z, z) \in c\mathcal{T}op_*$*. Define-se* $[(X, x), (Z, z)]_*$ *como sendo o* conjunto das classes de homotopia pontuadas de morfismos *pontuados* $(X, x) \to (Z, z)$ *(note-se que isto é um conjunto pois* $Z(X)$ *é um conjunto) — a relação de homotopia é uma relação de equivalência neste caso por causa da proposição 1.1.20. Dado um morfismo* $f : (Z, z) \to (Z', z')$ *(com* $(Z', z') \in c\mathcal{T}op_*$*), temos induzido um morfismo* $f_* : [(X, x), (Z, z)]_* \to [(X, x), (Z', z')]_*$*. Define-se ainda para* $k \in \mathbb{N}$ *o* grupo de homotopia *de ordem* k *de* (Z, z) *como sendo* $\pi_k(Z, z) = [(S^k, *), (Z, z)]_*$*. Define-se de forma similar* o conjunto de classes de homotopia de morfismos *(não pontuadas)* $[X, Z]$ *para* $X \in \mathcal{T}op$ *e* $Z \in c\mathcal{T}op$*. Também se tem, para cada morfismo* $f : Z \to Z'$ *em* $c\mathcal{T}op$*, uma aplicação induzida* $f_* : [X, Z] \to [X, Z']$.

1.1.25. Observação
Nas condições da definição anterior, temos que $\pi_k(Z, z)$ *é um grupo se* $k \geq 1$ *que é abeliano se* $k \geq 2$ *(a estrutura de grupo é definida como da forma usual em* $\mathcal{T}op$*). Além disso, dado um morfismo* $f : (Z, z) \to (Z', z')$ *(onde* $(Z, z), (Z', z') \in c\mathcal{T}op_*$*), a aplicação* $f_* : \pi_k(Z, z) \to \pi_k(Z', z')$ *é um homomorfismo de grupos para* $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ *.*

Note-se ainda que a definição anterior de conjuntos de classes de homotopia de morfismos e de grupos de homotopia coincide com a definição usual no caso de espaços topológicos.

1.1.26. Observação
Dado um functor $D : J \to c\mathcal{T}op_*$ *com* J *dirigida e pequena, tem-se que* $\operatorname{colim} D \in c\mathcal{T}op_*$ *e para qualquer espaço topológico pontuado* (X, x)

$$[(X, x), \operatorname{colim} D]_* = \operatorname*{colim}_{p \in J} [(X, x), D(p)]_*$$

como se conclui usando a proposição 1.1.11 e a observação 1.1.21 (é válida uma afirmação análoga para conjuntos de classes de homotopia não pontuadas). Em particular, para $k \in \mathbb{N}$ *tem-se que:*

$$\pi_k(\operatorname{colim} D) = \operatorname*{colim}_{p \in J} \pi_k(D(p))$$

(onde o colimite é em $\mathcal{S}et$*; para* $k \geq 1$ *o colimite pode ser tomado na categoria dos grupos e para* $k \geq 2$ *na categoria dos grupos abelianos).*

Com a noção de grupos de homotopia podemos definir o conceito de equivalência fraca.

1.1.27. Definição
Sejam $A, B \in c\mathcal{T}op$ e seja $f : A \to B$ um morfismo. Então f é uma equivalência fraca *se para qualquer ponto a de A e qualquer $k \in \mathbb{N}$ se tem que $f_* : \pi_k(A, a) \to \pi_k(B, f \circ a)$ é um isomorfismo. Um espaço $X \in c\mathcal{T}op$ diz-se* fracamente contráctil *se $X \to *$ é uma equivalência fraca ou, equivalentemente, se $\pi_k(X, x) = 0$ para quaisquer $k \in \mathbb{N}$ e x ponto de X.*

1.1.28. Observação
Note-se que a definição anterior de equivalência fraca estende o conceito de equivalência de homotopia fraca para espaços topológicos.

Tal como definimos grupos de homotopia e equivalência fraca, também é possível definir em $c\mathcal{T}op$ de forma análoga ao feito para $\mathcal{T}op$ conceitos como o de equivalência de homotopia, fibração (na definição de fibração em $c\mathcal{T}op$ consideram-se apenas levantamentos de homotopias a partir de espaços topológicos) e fibração de Serre. Na verdade, estes conceitos podem ser definidos em $\mathcal{S}et^{\mathcal{T}op^{\mathrm{op}}}$ e as suas definições ficam subentendidas. Além disso (e igualmente importante), também várias construções e factos fundamentais em teoria de homotopia de espaços topológicos são válidos em $c\mathcal{T}op$ (essencialmente com a mesma demonstração — o principal problema é que agora as definições e construções têm que ser feitas "sem usar pontos"). Enumeram-se algumas que serão necessárias no seguimento (o leitor é convidado a confirmar a validade das construções e a veracidade das afirmações — duas referências auxiliares são Hatcher [8], May [14]). Sejam $X, Z \in c\mathcal{T}op$:

- uma equivalência de homotopia entre elementos de $c\mathcal{T}op$ é uma equivalência fraca.
- existe um morfismo natural $X^{[0,1]} \to X$ [3] em $c\mathcal{T}op$ que é uma fibração e uma equivalência de homotopia.
- qualquer morfismo $f : X \to Z$ pode ser substituído por uma fibração de uma forma natural no sentido em que existe um diagrama natural em $c\mathcal{T}op$:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "i"'] & Y \\ X' \arrow[ur, "\widetilde{f}"'] & \end{tikzcd}$$

  tal que i é uma equivalência de homotopia e $\widetilde{f}$ é uma fibração (o ponto anterior é importante para esta construção). À fibra da fibração $\widetilde{f}$ sobre um ponto y de Y [4] chama-se a fibra de homotopia de f sobre y.

---

[3] Dados um espaço topológico A e um espaço quasi-topológico B, define-se o espaço quasi-topológico $B^A := B(A \times -)$. Se $B \in c\mathcal{T}op$ e A é localmente compacto Hausdorff então $B^A \in c\mathcal{T}op$, como se pode verificar usando a caracterização dos elementos de $c\mathcal{T}op$ dada em 1.1.17 (note-se que neste caso o functor $A \times - : \mathcal{T}op \to \mathcal{T}op$ preserva colimites).

[4] A fibra de um morfismo $X \to Z$ entre espaços quasi-topológicos sobre um ponto $* \to Z$ é o pullback do diagrama $X \longrightarrow Z \longleftarrow *$. Note-se que se $X, Z \in c\mathcal{T}op$, a fibra também está em $c\mathcal{T}op$.

- a sucessão exacta de homotopia da fibração é válida em *cTop*, isto é, para qualquer fibração $p : (X, x) \to (Z, z)$ (com fibra (F, x) [4] — fibra sobre z) e qualquer espaço topológico bem pontuado (A, a), o seguinte é uma sucessão exacta longa (ver May [14]):

$$(4) \quad \cdots \longrightarrow [\Sigma^k(A,a),(F,x)]_* \longrightarrow [\Sigma^k(A,a),(X,x)]_* \xrightarrow{p_*} \\ \xrightarrow{p_*} [\Sigma^k(A,a),(Z,z)]_* \xrightarrow{\partial} [\Sigma^{k-1}(A,a),F]_* \longrightarrow \cdots$$

  (onde Σ denota a suspensão reduzida).
- a afirmação anterior é válida para o caso de $p : (X, x) \to (Z, z)$ ser uma fibração de Serre e (A, a) ser um complexo-CW finito pontuado.
- em particular, a sucessão exacta (natural) dos grupos de homotopia de uma fibração de Serre é válida em *cTop* (basta tomar $(A, a) = (S^0, 1)$ no ponto anterior).
- a *HELP* (*Homotopy Extension and Lifting Property*) é válida em *cTop* para complexos-CW finitos.

A seguir apresenta-se um corolário simples (e importante) das afirmações anteriores.

1.1.29. Proposição
Sejam $p : X \to Z$, $p' : X' \to Z'$ fibrações de Serre de espaços quasi--topológicos em cTop e seja dado um diagrama comutativo entre aquelas fibrações:

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\widetilde{f}} & X' \\ {\scriptstyle p}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle p'} \\ Z & \xrightarrow{f} & Z' \end{array}$$

Então se f, $\widetilde{f}$ são equivalências fracas, a aplicação induzida nas fibras de p *e p' sobre quaisquer pontos (de Z e Z' tais que a imagem do ponto em Z é o ponto em Z') é uma equivalência fraca. Por outro lado, se f e as aplicações induzidas nas fibras de p, p' sobre quaisquer pontos são equivalências fracas então $\widetilde{f}$ também é.*

Demonstração. Segue facilmente usando a sucessão exacta (natural) dos grupos de homotopia da fibração e o lema dos 5 (na verdade para mostrar a bijecção em π_0 é necessário ainda um argumento simples que deixamos ao cuidado do leitor). ∎

Uma última propriedade importante de fibrações de Serre em *cTop* é dada na seguinte proposição (a demonstração segue um argumento dado em Strøm [21]).

1.1.30. Proposição
Sejam X, Z espaços quasi-topológicos. Se $f : X \to Z$ é uma fibração de Serre, A é um complexo-CW finito e B é um subcomplexo-CW de A tal que a inclusão $B \hookrightarrow A$ é uma equivalência de homotopia, então dado um

diagrama comutativo

$$
\begin{tikzcd}
B \arrow[r, "g'"] \arrow[d, hook] & X \arrow[d, "f"] \\
A \arrow[r, "g"] & Z
\end{tikzcd}
$$

em $c\mathcal{T}op$, existe um morfismo $\widetilde{g} : A \to X$ em $c\mathcal{T}op$ tal que o diagrama

$$
\begin{tikzcd}
B \arrow[r, "g'"] \arrow[d, hook] & X \arrow[d, "f"] \\
A \arrow[r, "g"] \arrow[ur, "\widetilde{g}"] & Z
\end{tikzcd}
$$

comuta.

Agora que já se apresentaram algumas propriedades homotópicas fundamentais de *cTop*, podemos continuar com a discussão do princípio-h. A noção de equivalência fraca entre elementos de *cTop* anteriormente definida permite-nos finalmente definir a noção de princípio-h local.

1.1.31. Definição
Seja $p : E \to B$ um fibrado suave e $\mathcal{R}$ uma relação diferencial de ordem $r \in \mathbb{N}$. Diz-se que $\mathcal{R}$ verifica o princípio-h paramétrico local *sobre A (ou verifica o princípio-h sobre $\mathcal{O}p\,A$) (onde $A \subset B$) se a aplicação $j^r : \mathrm{Sol}^r(\mathcal{R}|\mathcal{O}p\,A) \to \Gamma^0(\mathcal{R}|\mathcal{O}p\,A)$ é uma equivalência fraca (observe-se que $\Gamma^0(\mathcal{R}|\mathcal{O}p\,A)$ e $\mathrm{Sol}^r(\mathcal{R}|\mathcal{O}p\,A)$ estão em cTop pela proposição 1.1.22).*

Este princípio-h local é importante no caso de relações Diff-invariantes (a definir em breve). Definimos primeiro o conceito de *extensão contínua*.

1.1.32. Definição
Seja $p : E \to B$ um fibrado suave e designemos por $\mathrm{Diff}(B)$ o conjunto dos difeomorfismos (de classe C^∞) entre abertos de B e $\mathrm{Diff}(E)$ os difeomorfismos entre abertos de E. Então diz-se que $\Phi : \mathrm{Diff}(B) \to \mathrm{Diff}(E)$ é uma extensão contínua *para o fibrado $p : E \to B$ se temos o seguinte:*

- *Naturalidade: dado $f \in \mathrm{Diff}(B)$ um difeomorfismo de U para V (U, V abertos de B), $\Phi(f)$ é um difeomorfismo de $p^{-1}(U)$ para $p^{-1}(V)$ e o seguinte diagrama comuta:*

$$
\begin{tikzcd}
p^{-1}(U) \arrow[r, "\Phi(f)"] \arrow[d, "p|_U"] & p^{-1}(V) \arrow[d, "p|_V"] \\
U \arrow[r, "f"] & V
\end{tikzcd}
$$

- *Functorialidade: dado U aberto de B, $\Phi(\mathrm{id}_U) = \mathrm{id}_{p^{-1}(U)}$; dados $f, g \in \mathrm{Diff}(B)$ tal que a composta $f \circ g$ está definida tem-se que $\Phi(f \circ g) = \Phi(f) \circ \Phi(g)$.*
- *Continuidade: dado U aberto de B, a aplicação induzida por restrição de Φ:*

$$\Phi : \mathrm{Diff}(B) \cap C^\infty(U, B) \longrightarrow C^\infty(p^{-1}(U), E)$$

é contínua (onde se tomam a topologia de subespaço de $C^\infty(U, B)$ — que tem a topologia fraca-C^∞ — no domínio (lado esquerdo) e a topologia fraca-C^∞ no codomínio (lado direito)).

1.1.33. Observação
A definição de extensão contínua apresentada acima não é a mesma que a definição do mesmo termo apresentada em Geiges [2]*: a condição de continuidade na definição acima é mais restritiva que a condição análoga na definição em Geiges* [2].

1.1.34. Exemplos
A seguir descrevem-se alguns exemplos de extensões contínuas:

- No caso do fibrado trivial $B \times M \to B$ (para variedades B, M), uma extensão contínua é definida por $\Phi(f) = f \times \mathrm{id}_M$ para $f \in \mathrm{Diff}(B)$.
- No caso do fibrado tangente $TB \to B$ uma extensão contínua é dada por $\Phi(f) = df$ para $f \in \mathrm{Diff}(B)$.
- Dada uma extensão contínua $\Phi : \mathrm{Diff}(B) \to \mathrm{Diff}(E)$ como na definição acima, temos uma extensão contínua naturalmente induzida

  $$\Phi^r : \mathrm{Diff}(B) \to \mathrm{Diff}(E^{(r)})$$

  (para $r \in \mathbb{N}$) definida por:

  $$\begin{aligned} \Phi^r(f) : (p^r)^{-1}(U) &\longrightarrow (p^r)^{-1}(V) \\ j^r_x(s) &\longmapsto j^r_{f(x)}(\Phi(f) \circ s \circ f^{-1}) \end{aligned}$$

  para $f \in \mathrm{Diff}(B)$ um difeomorfismo de U para V (U, V abertos de B). Este exemplo é fundamental no seguimento por via da seguinte definição.

1.1.35. Definição
Seja $p : E \to B$ um fibrado suave e seja $\mathcal{R}$ uma relação diferencial de ordem $r \in \mathbb{N}$ em E. Então $\mathcal{R}$ diz-se $\mathrm{Diff}(B)$*-invariante se existe uma extensão contínua $\Phi : \mathrm{Diff}(B) \to \mathrm{Diff}(E)$ para E tal que $\mathcal{R}$ é invariante por Φ^r (como definida no exemplo anterior), isto é, para qualquer $f \in \mathrm{Diff}(B)$ com domínio num aberto U de B, $(\Phi^r(f))(\mathcal{R} \cap (p^r)^{-1}(U)) \subset \mathcal{R}$.*

1.1.36. Exemplo
Considere-se o fibrado trivial $E := M \times N \to M$. Então a relação (diferencial de ordem 1) de imersão em E, $\mathcal{I}$, é invariante: a extensão contínua Φ para E definida como no primeiro exemplo de 1.1.34 é tal que $\mathcal{I}$ é invariante por Φ^1.

A relevância do princípio-h local no estudo de relações diferenciais Diff--invariantes é demonstrada pela proposição seguinte.

1.1.37. Proposição
Seja $p : E \to B$ um fibrado suave e seja $\mathcal{R}$ uma relação diferencial $\mathrm{Diff}(B)$*--invariante de ordem $r \in \mathbb{N}$. Se A é um subconjunto de B e U é uma vizinhança regular de A (dizemos que U é uma vizinhança regular de A se para qualquer vizinhança V de A existe uma isotopia $\phi : U \times [0, 1] \to U$*

de U[5] tal que $A \subset \phi_1(U) \subset V$) então o princípio-$h$ paramétrico em U[6] é equivalente ao princípio-h paramétrico local sobre $\mathcal{O}p\,A$.

Demonstração. A demonstração de que o princípio-h em U implica o princípio-h local em A segue de forma elementar da observação 1.1.26 e da $\mathrm{Diff}(B)$-invariância da relação $\mathcal{R}$ e é deixada ao cuidado do leitor. A demonstração da implicação contrária é mais interessante e é apresentada a seguir. Seja $\Phi : \mathrm{Diff}(B) \to \mathrm{Diff}(E)$ uma extensão contínua para E tal que $\mathcal{R}$ é invariante por Φ^r e supomos que é válido o princípio-h local em A. Queremos mostrar que a aplicação $j^r : \mathrm{Sol}^r(\mathcal{R}|U) \to \Gamma^0(\mathcal{R}|U)$ é uma equivalência fraca, ou equivalentemente, que a aplicação

$$(j^r)_* : \pi_k(\mathrm{Sol}^r(\mathcal{R}|U), a) \longrightarrow \pi_k(\Gamma^0(\mathcal{R}|U), j^r(a))$$

é uma bijecção para quaisquer $a \in \mathrm{Sol}^r(\mathcal{R}|U)$ e $k \in \mathbb{N}$. Mostremos que é sobrejectiva. Sejam então dados $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ (o caso $k = 0$ usa argumentos semelhantes e é na verdade mais simples) e $a \in \mathrm{Sol}^r(\mathcal{R}|U)$ e seja

$$\alpha : (S^k, b) \longrightarrow (\Gamma^0(\mathcal{R}|U), j^r(a))$$

uma função contínua (b é o ponto de base de S^k). Sejam

$$r^{\Gamma}_{V,V'} : \Gamma^0(\mathcal{R}|V) \to \Gamma^0(\mathcal{R}|V')$$

e

$$r^{\mathrm{Sol}}_{V,V'} : \mathrm{Sol}^r(\mathcal{R}|V) \to \mathrm{Sol}^r(\mathcal{R}|V')$$

as aplicações induzidas por restrição de secções para quaisquer abertos V, V' de B com $V' \subset V$. Da observação 1.1.26 e da validade do princípio-h paramétrico sobre $\mathcal{O}p\,A$ segue imediatamente (usando novamente a proposição 1.1.26) que a aplicação natural (induzida por $(j^r)_*$ para cada vizinhança de A contida em U)

$$\operatorname*{colim}_{V \subset U \text{ viz de } A} \pi_k(\mathrm{Sol}^r(\mathcal{R}|V), r^{\mathrm{Sol}}_{U,V}(a)) \to \operatorname*{colim}_{V \subset U \text{ viz de } A} \pi_k(\Gamma^0(\mathcal{R}|V), r^{\Gamma}_{U,V} \circ j^r(a))$$

é uma bijecção. Assim, $r^{\Gamma}_{U,V} \circ \alpha$ representa um elemento de $\pi_k(\Gamma^0(\mathcal{R}|V), r^{\Gamma}_{U,V} \circ j^r(a))$ que está na imagem de

$$(j^r)_* : \pi_k(\mathrm{Sol}^r(\mathcal{R}|V), r^{\mathrm{Sol}}_{U,V}(a)) \longrightarrow \pi_k(\Gamma^0(\mathcal{R}|V), r^{\Gamma}_{U,V} \circ j^r(a))$$

para alguma vizinhança (suficientemente pequena) V de A contida em U. Sendo assim, existe uma homotopia pontuada

$$G : (S^k, b) \times [0,1] \longrightarrow (\Gamma^0(\mathcal{R}|V), r^{\Gamma}_{U,V} \circ j^r(a))$$

começando em $G_0 = r^{\Gamma}_{U,V} \circ \alpha$ e terminando em $G_1 = j^r \circ \beta$ para alguma aplicação

$$\beta : (S^k, b) \to (\mathrm{Sol}^r(\mathcal{R}|V), r^{\mathrm{Sol}}_{U,V}(a))$$

[5] Uma isotopia de U é uma aplicação suave $\phi : U \times [0,1] \to U$ tal que para todo o $t \in [0,1]$, $\phi_t = \phi(-,t)$ é um difeomorfismo sobre a imagem e $\phi_0 = \mathrm{id}_U$.

[6] O princípio-h paramétrico em U é, por definição, o princípio-h paramétrico local sobre U. Como U é aberto em B, o princípio-h paramétrico sobre U é equivalente à afirmação de que $j^r : \mathrm{Sol}^r(\mathcal{R}|U) \to \Gamma^0(\mathcal{R}|U)$ é uma equivalência de homotopia fraca (daí que se omita "local" da designação do princípio-h sobre U). Não voltarão a ser feitos comentários acerca da omissão de "local" na referência ao princípio-h sobre um aberto da base e esta discussão fica subentendida.

Para simplificar consideravelmente a notação no seguimento, definimos agora o pullback de secções de $\mathcal{R}$ e de soluções de $\mathcal{R}$: seja $g \in \mathrm{Diff}(B)$ um difeomorfismo de W para W' com W, W', W'' abertos de B tais que $W' \subset W''$. O pullback $g^* s \in \Gamma^0(\mathcal{R}, W)$ de uma secção $s \in \Gamma^0(\mathcal{R}, W'')$ por g define-se por $g^* s := \Phi^r(g^{-1}) \circ s \circ g$. O pullback de uma solução $s \in \mathrm{Sol}^r(\mathcal{R}, W'')$ por g é a solução de $\mathcal{R}$ sobre W definida por $g^* s := \Phi(g^{-1}) \circ s \circ g$. Dada uma aplicação contínua $f : X \to \Gamma^0(\mathcal{R}|W'')$ (resp. $f : X \to \mathrm{Sol}^r(\mathcal{R}|W'')$) onde X é um espaço topológico, define-se o pullback $g^* f : X \to \Gamma^0(\mathcal{R}|W)$ (resp. $g^* f : X \to \mathrm{Sol}^r(\mathcal{R}|W)$) por $(g^* f)(x) = g^*(f(x))$ para $x \in X$ ($g^* f$ assim definido é contínuo pela hipótese de continuidade na definição de extensão contínua).

Voltando à demonstração, considere-se agora $\phi : U \times [0,1] \to U$ uma isotopia de U tal que $\mathrm{im}(\phi_1) \subset V$ (onde $\phi_t := \phi(-, t)$ para $t \in [0,1]$). Então definimos uma homotopia

$$H : S^k \times [0,1] \longrightarrow \Gamma^0(\mathcal{R}|U)$$

em dois passos: primeiro percorremos o caminho $((\phi_t)^* \alpha)_{t \in [0,1]}$ e depois o caminho $((\phi_1)^*(G_t))_{t \in [0,1]}$ (note-se que os dois caminhos colam pois $(\phi_1)^* \alpha = (\phi_1)^*(r^{\Gamma}_{U,V} \circ \alpha) = (\phi_1)^*(G_0)$). A homotopia H é contínua pela hipótese de continuidade na definição 1.1.32. Como $G_1 = j^r \circ \beta$ temos que a homotopia H termina em

$$H_1 = (\phi_1)^*(G_1) = (\phi_1)^*(j^r \circ \beta) = j^r \circ ((\phi_1)^* \beta)$$

que factoriza através de j^r, como se pretende. A homotopia H não é pontuada, mas podemos modificar a sua definição um pouco para construir uma homotopia pontuada que resolve o problema em questão (na verdade, a homotopia H é suficiente para resolver o problema no caso $k = 0$). Antes de continuar, definimos, pois, uma "acção" de um caminho $\gamma : [0, t] \to X$ (onde X é um espaço topológico e $t \in [0,1]$) no conjunto das aplicações $(S^k, b) \to (X, \gamma(t))$. Para isso, considera-se S^k como sendo um quociente de D^k que identifica ∂D^k com o ponto de base, b, de S^k. Dada uma aplicação

$$f : (S^k, b) \longrightarrow (X, \gamma(t))$$

que corresponde (pela aplicação quociente $D^k \to S^k$) a uma aplicação $\overline{f} : D^k \to X$ (tal que $\overline{f}(\partial D^k) = \{\gamma(t)\}$), define-se

$$\tau_\gamma f : (S^k, b) \longrightarrow (X, \gamma(0))$$

(note-se a mudança do ponto de base em X) como sendo a aplicação induzida (através da aplicação quociente $D^k \to S^k$) por $\overline{\tau_\gamma f} : D^k \to X$ dada da seguinte forma:

$$\overline{\tau_\gamma f}(x) = \begin{cases} \overline{f}\big(\frac{x}{1-t/2}\big) & \text{se } |x| < 1 - t/2 \\ \gamma\big(2(1-|x|)\big) & \text{se } |x| \geq 1 - t/2 \end{cases}$$

para $x \in D^k = \{x \in \mathbb{R}^k : |x| \leq 1\}$ ($\overline{\tau_\gamma f}$ percorre o caminho γ radialmente na região $\{x \in D^k : |x| \geq 1 - t/2\}$; no disco $\{x \in D^k : |x| \leq 1 - t/2\}$, $\overline{\tau_\gamma f}$ reproduz $\overline{f}$ depois de convenientemente reescalada).

Podemos agora terminar a demonstração da proposição: em vez da homotopia H, considera-se a homotopia pontuada

$$H' : (S^k, b) \times [0,1] \to \Gamma^0(\mathcal{R}|U)$$

que percorre primeiro o caminho $(\tau_{j^r \circ \gamma|_{[0,t]}}((\phi_t)^*\alpha))_{t\in[0,1]}$ e depois o caminho $(\tau_{j^r\circ\gamma}((\phi_1)^*(G_t)))_{t\in[0,1]}$ (observe-se a relação com a definição de H; na verdade, uma homotopia com as propriedades requeridas de H' pode ser obtida formal e não explicitamente a partir de H, β e γ usando apenas uma propriedade de levantamento/extensão de aplicações para cofibrações — ver Strøm [21] ou proposição 1.1.30), onde $\gamma : [0,1] \to \mathrm{Sol}^r(\mathcal{R}|U)$ é o caminho $((\phi_t)^*a)_{t\in[0,1]}$. Pode agora verificar-se que H' é de facto uma homotopia pontuada (contínua) que começa em α e termina em

$$H'_1 = \tau_{j^r\circ\gamma} H_1 = \tau_{j^r\circ\gamma}(j^r \circ ((\phi_1)^*\beta)) = j^r \circ (\tau_\gamma((\phi_1)^*\beta))$$

de onde se conclui que α representa um elemento de $\pi_k(\Gamma^0(\mathcal{R}|U), j^r(a))$ que está na imagem de

$$(j^r)_* : \pi_k(\mathrm{Sol}^r(\mathcal{R}|U), a) \longrightarrow \pi_k(\Gamma^0(\mathcal{R}|U), j^r(a))$$

Concluimos portanto que esta aplicação é sobrejectiva, como se pretendia.

A demonstração da injectividade usa argumentos semelhantes aos apresentados acima e é deixada ao cuidado do leitor. ■

Ainda acerca de princípios-h locais, observemos que o princípio-h local num ponto é verdadeiro para uma relação aberta (observe-se a relação e a semelhança entre esta proposição e a proposição 3.12 de Geiges [2]):

1.1.38. Proposição
Se $p : E \to B$ é um fibrado suave e $\mathcal{R}$ é uma relação diferencial (de ordem $r \in \mathbb{N}$) aberta em E então o princípio-h paramétrico local é válido em $\{b\}$ para qualquer $b \in B$.

Demonstração. Damos apenas a ideia da demonstração. Primeiro mostramos que $(j^r)_* : \pi_0(\mathrm{Sol}^r(\mathcal{R}|\mathcal{O}p\,\{b\})) \to \pi_0(\Gamma^0(\mathcal{R}|\mathcal{O}p\,\{b\}))$ é sobrejectivo. Observe-se que isto é equivalente à aplicação natural (induzida por tomar os jactos)

$$(5) \qquad \operatorname*{colim}_{U \text{ viz de } b} \pi_0(\mathrm{Sol}^r(\mathcal{R}|U)) \longrightarrow \operatorname*{colim}_{U \text{ viz de } b} \pi_0(\Gamma^0(\mathcal{R}|U))$$

ser sobrejectiva. Seja então $s \in \Gamma^0(\mathcal{R}|U)$ para alguma vizinhança U de b (s representa um elemento do lado direito de (5)). Então existe uma secção holonómica t de $E^{(r)}$ sobre V tal que $t(b) = s(b)$ para alguma vizinhança V de b (basta tomar $t = j^r(s')$ para s' uma secção de E em torno de b tal que $j^r_b(s') = s(b)$). Como $\mathcal{R}$ é aberta, existe uma vizinhança de b em que t tem imagem em $\mathcal{R}$ (e portanto, nessa vizinhança é o jacto de uma solução de $\mathcal{R}$) e é homotópica (através de secções de $\mathcal{R}$) a s. Isto mostra que o elemento no lado direito de (5) representado por s está na imagem da aplicação em (5). Assim, $(j^r)_* : \pi_0(\mathrm{Sol}^r(\mathcal{R}|\mathcal{O}p\,\{b\})) \to \pi_0(\Gamma^0(\mathcal{R}|\mathcal{O}p\,\{b\}))$ é uma sobrejecção.

A forma de estender o argumento anterior a π_k ($k \in \mathbb{N}$) consiste em obter (usando a notação acima) para cada secção s um "representante" holonómico t que dependa continuamente de s. Desta forma, o argumento acima valeria para aplicações $S^k \to \Gamma^0(\mathcal{R}|U)$ (para alguma vizinhança U de b) — e não apenas para elementos de $\Gamma^0(\mathcal{R}|U)$ — mostrando a sobrejectividade em π_k. Uma forma de obter os "representantes" holonómicos de forma canónica e contínua consiste em mergulhar a variedade E em $\mathbb{R}^q$ para $q \in \mathbb{N}$ — note-se que secções do espaço de jactos do fibrado trivial $B \times \mathbb{R}^q \to B$ têm em cada ponto "representantes" holonómicos canónicos polinomiais relativamente a alguma carta — e usar uma vizinhança tubular de E em $\mathbb{R}^q$ para obter os "representantes" holonómicos de secções locais de $E^{(r)}$ (a partir dos "representantes" canónicos que se têm para o caso do fibrado trivial $B \times \mathbb{R}^q \to B$).

A injectividade em π_k ($k \in \mathbb{N}$) é provada por argumentos semelhantes. ■

1.1.39. Observação
A demonstração da proposição 3.12 em Geiges [2] *apresenta os argumentos descritos na demonstração acima de forma bastante completa.*

1.1.40. Observação
Uma consequência imediata das duas proposições anteriores é que uma relação diferencial aberta num fibrado suave sobre $\mathbb{R}^n$ ($n \in \mathbb{N}$) que seja $\mathrm{Diff}(\mathbb{R}^n)$*-invariante verifica o princípio-h paramétrico. Esta afirmação é um caso muito particular de um teorema que se provará neste capítulo: qualquer relação diferencial aberta* $\mathrm{Diff}(B)$*-invariante num fibrado suave $p : E \to B$ verifica o princípio-h paramétrico.*

Antes de iniciarmos a demonstração prometida do princípio-h, damos mais algumas definições importantes. Introduz-se primeiro o conceito de micro-fibração (que está relacionado com o conceito de fibração de Serre).

1.1.41. Definição
Seja $p : X \to Z$ um morfismo entre espaços quasi-topológicos. Diz-se que p é uma micro-fibração *se dados P um poliedro compacto (ou seja, finito), $F : P \times [0,1] \to Z$ e $f : P \to X$ morfismos tais que o seguinte diagrama comute (em $\mathcal{S}et^{\mathcal{T}op^{op}}$):*

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, "f"] \arrow[d, hook, "(\mathrm{id}_P,0)"'] & X \arrow[d, "p"] \\ P \times [0,1] \arrow[r, "F"] & Z \end{tikzcd}$$

existem $\varepsilon \in \,]0,1]$ e $\widetilde{F} : P \times [0,\varepsilon] \to X$ tais que o seguinte diagrama comuta:

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, "f"] \arrow[d, hook, "(\mathrm{id}_P,0)"'] & X \arrow[dd, "p"] \\ P \times [0,\varepsilon] \arrow[ur, "\widetilde{F}"'] \arrow[d, hook] & \\ P \times [0,1] \arrow[r, "F"] & Z \end{tikzcd}$$

1.1.42. Observação
Se pudermos escolher sempre $\varepsilon = 1$, $p : X \to Z$ é uma fibração de Serre.

1.1.43. Definição
Seja $p : E \to B$ um fibrado suave e $\mathcal{R}$ uma relação diferencial de ordem $r \in \mathbb{N}$ em E. Dado um par de subespaços compactos de B, (C,C') (portanto $C' \subset C$), diz-se que $\mathrm{Sol}^r(\mathcal{R}|-)$ *é* flexível *(resp.* micro-flexível*) sobre (C, C') (ou que as soluções de $\mathcal{R}$ são flexíveis (resp. micro-flexíveis) sobre (C, C')) se o morfismo de restrição (de soluções)* $\mathrm{Sol}^r(\mathcal{R}|\mathcal{O}p\, C) \to \mathrm{Sol}^r(\mathcal{R}|\mathcal{O}p\, C')$ *é uma fibração de Serre (resp. uma micro-fibração). Diz-se que* $\mathrm{Sol}^r(\mathcal{R}|-)$ *é flexível (resp. micro-flexível) (ou que as soluções de $\mathcal{R}$ são flexíveis (resp. micro-flexíveis)) se* $\mathrm{Sol}^r(\mathcal{R}|-)$ *for flexível (resp. micro-flexível) para todos os pares de subespaços compactos de B.*

As duas proposições seguintes estão relacionadas com a definição anterior:

1.1.44. Proposição
Seja $p : E \to B$ um fibrado suave e $\mathcal{R}$ uma relação diferencial de ordem $r \in \mathbb{N}$ em E. Seja (C, C') um par de subespaços compactos de B. Então o morfismo induzido por restrição de secções $r : \Gamma^0(\mathcal{R}|\mathcal{O}p\, C) \to \Gamma^0(\mathcal{R}|\mathcal{O}p\, C')$ é uma fibração de Serre.

Demonstração. Seja P um poliedro finito e sejam $f : P \to \Gamma^0(\mathcal{R}|\mathcal{O}p\, C)$, $F : P \times [0,1] \to \Gamma^0(\mathcal{R}|\mathcal{O}p\, C')$ morfismos tais que $F|_{P\times\{0\}} = r \circ f$ (identifica-se P com $P\times\{0\}$). Pela proposição 1.1.12 conclui-se que F tem um levantamento $F' : P\times[0,1] \to \Gamma^0(\mathcal{R}|V)$ para alguma vizinhança V de C'. Analogamente, f admite um levantamento $f' : P \to \Gamma^0(\mathcal{R}|U)$ para alguma vizinhança U de C em B. Como $r'_V \circ F'|_{P\times\{0\}} = f = r'_U \circ f'$ (onde $r'_W : \Gamma^0(\mathcal{R}|W) \to \Gamma^0(\mathcal{R}|\mathcal{O}p\, C')$ é o morfismo induzido por restrição de secções para cada vizinhança W de A) tem-se que (ver a proposição 1.1.12 e a observação 1.1.21) $r''_{V,V'} \circ F'|_{P\times\{0\}} = r''_{U,V'} \circ f'$ para alguma vizinhança V' de C' contida em $V \cap U$ ($r''_{W,W'} : \Gamma^0(\mathcal{R}|W) \to \Gamma^0(\mathcal{R}|W')$ é o morfismo de restrição de secções para quaisquer abertos W, W' de B com $W' \subset W$). Faça-se então $F'' = r''_{V,V'} \circ F'$ e seja $\rho : U \to [0,1]$ uma aplicação contínua com suporte compacto contido em V e tal que $\rho = 1$ numa vizinhança de C'. Então definimos uma homotopia $\widetilde{F}' : P \times [0,1] \to \Gamma^0(\mathcal{R}|U)$ (que está bem definida porque $F''|_{P\times\{0\}} = r''_{U,V'} \circ f'$) da seguinte forma: para quaisquer $(x,t) \in P \times [0,1]$, $(\widetilde{F}'(x,t))(b) = (F''(x, \rho(b)t))(b)$ para $b \in V$ e $(\widetilde{F}'(x,t))(b) = (f'(x))(b)$ para $b \in U \setminus V$. $\widetilde{F}'$ induz (compondo com a aplicação de restrição de secções) uma homotopia $\widetilde{F} : P \times [0,1] \to \Gamma^0(\mathcal{R}|\mathcal{O}p\, C)$ tal que o diagrama

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, "\widetilde{f}"] \arrow[d, "(\mathrm{id}_P, 0)"'] & \Gamma^0(\mathcal{R}|\mathcal{O}p\, C) \arrow[d, "r"] \\ P \times [0,1] \arrow[ur, "\widetilde{F}"] \arrow[r, "F"] & \Gamma^0(\mathcal{R}|\mathcal{O}p\, C') \end{tikzcd}$$

comuta. ∎

1.1.45. Observação
Por analogia à definição 1.1.43, a propriedade estabelecida na proposição acima costuma abreviar-se afirmando que $\Gamma^0(\mathcal{R}|-)$ é flexível (ou que as secções de $\mathcal{R}$ são flexíveis).

1.1.46. Proposição
Dada qualquer relação diferencial aberta $\mathcal{R}$ num fibrado suave $p : E \to B$, as soluções de $\mathcal{R}$ são micro-flexíveis.

Demonstração. A demonstração desta proposição segue exactamente os mesmos passos que a demonstração da proposição anterior tomando um par arbitrário de subespaços compactos (C, C') de B (substituindo os espaços de secções de $\mathcal{R}$ que aparecem naquela demonstração pelos respectivos espaços de soluções de $\mathcal{R}$): a única diferença consiste em que a aplicação ρ usada tem que ser de classe C^∞ no caso presente. No final, a homotopia construída $\widetilde{F}'$ tem imagem em $\mathrm{Sol}^r(\mathcal{R}|U)$ apenas sobre $P \times [0, \varepsilon]$ para algum $\varepsilon \in]0, 1]$ (visto que $\widetilde{F}|_{P\times 0}$ tem imagem naquele espaço e a relação é aberta). Assim, induz uma homotopia $\widetilde{F} : P \times [0, \varepsilon] \to \mathrm{Sol}^r(\mathcal{R}|\mathcal{O}p\, C)$, que nos dá o levantamento procurado na definição de micro-fibração. ■

1.1.47. Exemplo
Visto que a relação de imersão é aberta, concluímos que as suas soluções são micro-flexíveis.

Usando as propriedades "homotópicas" abstractas de $c\mathcal{T}op$, a demonstração do princípio-h que a seguir se faz é, de certo modo, formal. É esta a vantagem da formalização exposta usando espaços quasi-topológicos (ou, mais precisamente, $c\mathcal{T}op$).

A parte mais formal do argumento para demonstrar o princípio-h encontra-se na proposição seguinte.

1.1.48. Proposição
Seja $p : E \to B$ um fibrado suave e seja $\mathcal{R}$ uma relação diferencial em E $\mathrm{Diff}(B)$-invariante de ordem $r \in \mathbb{N}$ cujas soluções são micro-flexíveis. Suponha-se ainda que $\mathcal{R}$ satisfaz o princípio-h paramétrico local em $\{b\}$ para algum $b \in B$ e que as soluções de $\mathcal{R}$ são flexíveis sobre $(D^k, \partial D^k)$ para qualquer disco D^k mergulhado (suavemente) em B com $k \in \{0, \ldots, \dim B\}$. Então $\mathcal{R}$ satisfaz o princípio-h paramétrico (sobre B). Além disso, se B é uma variedade aberta, a condição de flexibilidade só é necessária para $k \in \{0, \ldots, \dim B - 1\}$.

Necessitamos de um lema auxiliar.

1.1.49. Lema
Seja $p : E \to B$ um fibrado suave e seja $\mathcal{R}$ uma relação diferencial de ordem $r \in \mathbb{N}$. Sejam F, G compactos de B tais que $\mathrm{Sol}^r(\mathcal{R}|-)$ é flexível sobre $(F, F \cap G)$. Então $\mathrm{Sol}^r(\mathcal{R}|-)$ é flexível sobre $(F \cup G, G)$ e se o princípio-h paramétrico local para $\mathcal{R}$ é válido sobre F, G e $F \cap G$ então o mesmo também é válido sobre $F \cup G$.

Demonstração. A conclusão acerca da flexibilidade de $\mathrm{Sol}^r(\mathcal{R}|-)$ sobre $(F \cup G, G)$ segue imediatamente de o diagrama (as setas são todas induzidas por restrição de secções)

$$
\begin{tikzcd}
\mathrm{Sol}^r(\mathcal{R}|\mathcal{O}p\,(F\cup G)) \arrow[r] \arrow[d, "r_1"'] & \mathrm{Sol}^r(\mathcal{R}|\mathcal{O}p\,F) \arrow[d, "r_2"'] \\
\mathrm{Sol}^r(\mathcal{R}|\mathcal{O}p\,G) \arrow[r] & \mathrm{Sol}^r(\mathcal{R}|\mathcal{O}p\,(F\cap G))
\end{tikzcd}
\tag{6}
$$

ser um diagrama de pullback (de espaços quasi-topológicos) e a aplicação r_2 ser uma fibração de Serre. Temos então um morfismo de fibrações de Serre:

$$
\begin{tikzcd}
\mathrm{Sol}^r(\mathcal{R}|\mathcal{O}p\,(F\cup G)) \arrow[r, "j^r"] \arrow[d, "r_1"'] & \Gamma^0(\mathcal{R}|\mathcal{O}p\,(F\cup G)) \arrow[d, "r_1'"'] \\
\mathrm{Sol}^r(\mathcal{R}|\mathcal{O}p\,G) \arrow[r, "j^r"] & \Gamma^0(\mathcal{R}|\mathcal{O}p\,G)
\end{tikzcd}
$$

(os morfismos verticais são fibrações de Serre pelo acima e pela proposição 1.1.44). A aplicação horizontal inferior é uma equivalência fraca visto que o princípio-h paramétrico é satisfeito sobre $\mathcal{O}p\,G$. Como os morfismos induzidos nas fibras (sobre quaisquer pontos) pelo morfismo horizontal superior são equivalências fracas — esta afirmação é demonstrada a seguir — temos que o morfismo horizontal superior é uma equivalência fraca (pelo teorema 1.1.29) o que demonstra a validade do princípio-h paramétrico sobre $\mathcal{O}p\,(F\cup G)$.

Para mostrar que os morfismos induzidos nas fibras sobre quaisquer pontos são equivalências de homotopia fracas, observe-se que temos um diagrama comutativo

$$
\begin{tikzcd}
\mathrm{Sol}^r(\mathcal{R}|\mathcal{O}p\,(F\cup G)) \arrow[rr, "j^r"] \arrow[dr] \arrow[dd, "r_1"'] & & \Gamma^0(\mathcal{R}|\mathcal{O}p\,(F\cup G)) \arrow[dr] \arrow[dd, "r_1'"] & \\
& \mathrm{Sol}^r(\mathcal{R}|\mathcal{O}p\,F) \arrow[rr, crossing over, "j^r"] & & \Gamma^0(\mathcal{R}|\mathcal{O}p\,F) \arrow[dd, "r_2'"] \\
\mathrm{Sol}^r(\mathcal{R}|\mathcal{O}p\,G) \arrow[rr, "j^r"] \arrow[dr] & & \Gamma^0(\mathcal{R}|\mathcal{O}p\,G) \arrow[dr] & \\
& \mathrm{Sol}^r(\mathcal{R}|\mathcal{O}p\,(F\cap G)) \arrow[rr, "j^r"] \arrow[from=uu, crossing over, "r_2"'] & & \Gamma^0(\mathcal{R}|\mathcal{O}p\,(F\cap G))
\end{tikzcd}
$$

em que a face de trás é o diagrama anterior e a face esquerda é o diagrama (6). Fixando um ponto de base (arbitrário) em $\mathrm{Sol}^r(\mathcal{R}|\mathcal{O}p\,(F\cup G))$ temos então que:

1. visto que o diagrama (6) (face esquerda do diagrama cúbico acima) é um diagrama de pullback temos que a fibra da aplicação r_1 é isomorfa (pela aplicação induzida nas fibras) à fibra de r_2.
2. visto que o diagrama (face direita do diagrama cúbico acima)

$$
\begin{tikzcd}
\Gamma^0(\mathcal{R}|\mathcal{O}p\,(F\cup G)) \arrow[r] \arrow[d, "r_1'"'] & \Gamma^0(\mathcal{R}|\mathcal{O}p\,F) \arrow[d, "r_2'"'] \\
\Gamma^0(\mathcal{R}|\mathcal{O}p\,G) \arrow[r] & \Gamma^0(\mathcal{R}|\mathcal{O}p\,(F\cap G))
\end{tikzcd}
$$

é um diagrama de pullback (em que todas as aplicações são fibrações de Serre), temos que a aplicação induzida entre as fibras de r_1' e r_2' é um isomorfismo.

3. a aplicação induzida entre as fibras de r_1 e r_1' corresponde, pelos isomorfismos estabelecidos nos dois pontos anteriores, à aplicação induzida nas fibras de r_2 e r_2' pelo seguinte morfismo de fibrações de Serre (face da frente do diagrama cúbico acima):

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Sol}^r(\mathcal{R}|\mathcal{O}p\,F) \arrow[r, "j^r"] \arrow[d, "r_2"'] & \Gamma^0(\mathcal{R}|\mathcal{O}p\,F) \arrow[d, "r_2'"'] \\ \mathrm{Sol}^r(\mathcal{R}|\mathcal{O}p\,(F\cap G)) \arrow[r, "j^r"] & \Gamma^0(\mathcal{R}|\mathcal{O}p\,(F\cap G)) \end{tikzcd}$$

Como as aplicações horizontais neste diagrama são equivalências fracas (pelo teorema 1.1.29 e pela validade dos princípios-h paramétricos respectivos) temos que a aplicação induzida nas fibras é uma equivalência de homotopia fraca. Assim, a aplicação induzida nas fibras de r_1 e r_1' (sobre quaisquer pontos) é uma equivalência fraca como se pretendia concluir.

■

1.1.50. Observação

Como deverá ter ficado claro, a demonstração anterior é um argumento "puramente formal" em $c\mathcal{T}op$ para o qual apenas as hipóteses sobre a validade do princípio-h paramétrico (que corresponde a uma equivalência fraca entre dois elementos de $c\mathcal{T}op$), a flexibilidade (que corresponde a um determinado morfismo ser uma fibração de Serre) e a propriedade de pullback enunciada na proposição 1.1.13 são relevantes.

Demonstração da proposição 1.1.48. Fazemos apenas um esboço da demonstração. Antes de mais, observe-se que se pode assumir que a variedade B tem bordo vazio pois usando uma vizinhança de colar de ∂B e aplicando a proposição 1.1.37 (duas vezes) conclui-se que o princípio-h paramétrico para $\mathcal{R}$ sobre B é equivalente ao princípio-h paramétrico sobre $B \setminus \partial B$. Assumimos então que $\partial B = \emptyset$.

Observe-se agora que a $\mathrm{Diff}(B)$-invariância de $\mathcal{R}$ permite concluir que se o princípio-h paramétrico local sobre $\{b\}$ é válido para algum $b \in B$ então é válido sobre qualquer $b \in B$ (quaisquer dois pontos de B têm vizinhanças difeomorfas). Como $\mathcal{R}$ é $\mathrm{Diff}(B)$-invariante tem-se que a validade do princípio-h paramétrico local sobre conjuntos singulares de B implica a validade do mesmo sobre D^k para qualquer disco D^k mergulhado em B (para $k \in \{0, \dots, \dim B\}$) — basta ver que existe um mergulho $\phi : V \to B$ de uma vizinhança (convexa) V de $D^k \subset \mathbb{R}^k$ que estende o mergulho de D^k em B e aplicar a proposição 1.1.37 duas vezes a uma vizinhança tubular de $\phi(V)$. Por indução (em k), também se conclui que o princípio-h paramétrico local é válido sobre S^k para qualquer esfera S^k mergulhada em B (com $k \in \{0, \dots, \dim B - 1\}$): basta ver que tomando dois discos suaves de S^k (na verdade, os discos são hemisférios de S^k), D^k_+ e D^k_-, cuja intersecção coincide com os seus bordos $\partial D^k_+ = \partial D^k_-$ e cuja união é S^k, se tem que o princípio-h paramétrico local é válido sobre D^k_+, D^k_- (como visto acima) e sobre $D^k_+ \cap D^k_- = \partial D^k_+$ (visto que ∂D^k_+ é uma esfera de dimensão $k-1$ se $k > 0$ — caso em que a afirmação segue por hipótese de indução — ou vazio se $k = 0$ — a afirmação é óbvia). Assim, pelo lema anterior (visto que as soluções de $\mathcal{R}$ são flexíveis sobre $(D^k_+, \partial D^k_+)$) tem-se que o princípio-h paramétrico local é válido sobre S^k (o que termina a demonstração por indução).

Em síntese, sabemos então que $\mathcal{R}$ satisfaz o princípio-h paramétrico local sobre D^k e sobre ∂D^k para $k \in \{0, \ldots, \dim B\}$ (ou $k \in \{0, \ldots, \dim B - 1\}$ se B for aberta) para qualquer disco D^k mergulhado suavemente em B. O resto da demonstração consiste agora em aplicar o lema anterior aos sucessivos estágios da "construção" de uma variedade por colagem sucessiva de células obtida a partir de uma função de Morse na variedade. Supomos então dada uma função de Morse, f, em B que verifica as seguintes propriedades (ver, por exemplo, Kosinski [11], capítulo VII — em particular os teoremas VII.1.1 e VII.6.1[7]):

(i) A função f é positiva e toma valores distintos em pontos críticos distintos de f.

(ii) O conjunto dos valores críticos de f é $\{c_i : i \in I\}$ com $I = \mathbb{N} \setminus \{0\}$ ou $I = \{1, \ldots, n\}$ para algum $n \in \mathbb{N}$ onde $c_i < c_{i+1}$ para qualquer $i \in I$ tal que $i + 1 \in I$. Além disso, se $I = \mathbb{N} \setminus \{0\}$ então $\lim\limits_{i \to \infty} c_i = \infty$.

(iii) Se B é aberta então f não tem máximos locais (isto é, não possui pontos críticos de índice igual a $\dim B$) e $f : B \to [0, \infty[$ é própria (ou equivalentemente $\forall_{c \in \mathbb{R}}\, f^{-1}(]-\infty, c])$ é compacto).

Seja $c_0 = 0$. Para cada $i \in I \cup \{0\}$, sejam $c'_i, c''_i \in]c_i, c_{i+1}[$ com $c'_i < c''_i$ se $i + 1 \in I$ e sejam $c'_i, c''_i \in]c_i, +\infty[$ com $c'_i < c''_i$ caso contrário.

Mostra-se agora por indução em $i \in I \cup \{0\}$ que o princípio-h paramétrico local para $\mathcal{R}$ é válido sobre $f^{-1}(]-\infty, c'_i])$. Esta afirmação é óbvia para $i = 0$ (neste caso $f^{-1}(]-\infty, c'_i]) = \emptyset$). Suponha-se então que $i \in I$ e que (hipótese de indução) $\mathcal{R}$ satisfaz o princípio-h sobre $f^{-1}(]-\infty, c'_{i-1}])$. Como f é uma função de Morse com um único ponto crítico entre c'_{i-1} e c''_i (e pela compacidade de $f^{-1}(]-\infty, c''_i]))$, sabemos que $f^{-1}(]-\infty, c''_i[)$ é uma vizinhança regular de $f^{-1}(]-\infty, c'_{i-1}]) \cup D^k$ para algum disco D^k mergulhado em B com

$$D^k \cap f^{-1}(]-\infty, c'_{i-1}]) = \partial D^k$$

e $k = \operatorname{ind}_f(c_i)$ (ver demonstração do teorema 6.3.1 de Hirsch [9]). Assim o princípio-h paramétrico sobre $f^{-1}(]-\infty, c''_i[)$ é equivalente ao princípio-h paramétrico sobre $f^{-1}(]-\infty, c'_{i-1}]) \cup D^k$ (proposição 1.1.37). No entanto, as soluções de $\mathcal{R}$ são flexíveis sobre $(D^k, \partial D^k) = (D^k, D^k \cap f^{-1}(]-\infty, c'_{i-1}]))$ (note-se que se B for aberta, $k < \dim B$) e $\mathcal{R}$ satisfaz o princípio-h paramétrico local sobre D^k, ∂D^k (como concluído acima) e sobre $f^{-1}(]-\infty, c'_{i-1}])$ (hipótese de indução). Desta forma, o lema 1.1.49 garante que as soluções de $\mathcal{R}$ são flexíveis sobre $(f^{-1}(]-\infty, c'_{i-1}]) \cup D^k, f^{-1}(]-\infty, c'_{i-1}]))$ e que $\mathcal{R}$ satisfaz o princípio-h paramétrico local sobre $f^{-1}(]-\infty, c'_{i-1}]) \cup D^k$. Assim se

[7] Os teoremas referidos dão informação suficiente sobre cobordismos para permitir a construção de uma função como a pretendida depois de se representar a variedade B como a colagem de uma sucessão de cobordismos (compactos) o que é sempre possível.

conclui que $\mathcal{R}$ satisfaz o princípio-h paramétrico local sobre $f^{-1}(]-\infty, c_i''[)$ e portanto (segue da proposição 1.1.37 visto que $f^{-1}(]-\infty, c_i''[)$ é uma vizinhança regular de $f^{-1}(]-\infty, c_i'])$) também sobre $f^{-1}(]-\infty, c_i'])$ (o que termina a demonstração por indução). Por outro lado, como existem vizinhanças arbitrariamente pequenas de $f^{-1}(]-\infty, c_i'])$ (nomeadamente $f^{-1}(]-\infty, c_i' + \varepsilon[)$ para $\varepsilon \in]0, c_i'' - c_i'])$ que são vizinhanças regulares fortes (a definição de vizinhança regular forte é dada no enunciado do lema seguinte) de $f^{-1}(]-\infty, c_{i-1}']) \cup D^k$ (ver demonstração do teorema 6.3.1 de Hirsch [9]), o lema seguinte mostra que as soluções de $\mathcal{R}$ são flexíveis sobre $(f^{-1}(]-\infty, c_i']), f^{-1}(]-\infty, c_{i-1}']) \cup D^k)$. Como as soluções de $\mathcal{R}$ também são flexíveis sobre $(f^{-1}(]-\infty, c_{i-1}']) \cup D^k, f^{-1}(]-\infty, c_{i-1}']))$ (e como a composta de fibrações de Serre é uma fibração de Serre) tem-se então que as soluções de $\mathcal{R}$ são flexíveis sobre $(f^{-1}(]-\infty, c_i']), f^{-1}(]-\infty, c_{i-1}']))$. Mostrou-se então, não apenas que $\mathcal{R}$ satisfaz o princípio-h paramétrico local sobre $f^{-1}(]-\infty, c_i'])$ para $i \in I \cup \{0\}$, mas também que as soluções de $\mathcal{R}$ são flexíveis sobre $(f^{-1}(]-\infty, c_i']), f^{-1}(]-\infty, c_{i-1}']))$ para $i \in I$.

Suponhamos agora que $I = \mathbb{N} \setminus \{0\}$. As conclusões anteriores implicam que no seguinte diagrama comutativo:

$$
\begin{tikzcd}
\vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] \\
\mathrm{Sol}^r(\mathcal{R}|\mathcal{O}p\, f^{-1}(]-\infty, c_{i+i}'])) \arrow[r, "j^r"] \arrow[d] & \Gamma^0(\mathcal{R}|\mathcal{O}p\, f^{-1}(]-\infty, c_{i+i}'])) \arrow[d] \\
\mathrm{Sol}^r(\mathcal{R}|\mathcal{O}p\, f^{-1}(]-\infty, c_i'])) \arrow[r, "j^r"] \arrow[d] & \Gamma^0(\mathcal{R}|\mathcal{O}p\, f^{-1}(]-\infty, c_i'])) \arrow[d] \\
\vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] \\
\mathrm{Sol}^r(\mathcal{R}|\mathcal{O}p\, f^{-1}(]-\infty, c_1'])) \arrow[r, "j^r"] \arrow[d] & \Gamma^0(\mathcal{R}|\mathcal{O}p\, f^{-1}(]-\infty, c_1'])) \arrow[d] \\
\mathrm{Sol}^r(\mathcal{R}|\mathcal{O}p\, f^{-1}(]-\infty, c_0'])) \arrow[r, "j^r"] & \Gamma^0(\mathcal{R}|\mathcal{O}p\, f^{-1}(]-\infty, c_0']))
\end{tikzcd}
\tag{7}
$$

os morfismos horizontais são equivalências fracas e os morfismos verticais são fibrações de Serre (pelo acima para os morfismos à esquerda e pela proposição 1.1.44 para os da direita). Sendo assim tem-se que a aplicação induzida no limite (pelas aplicações j^r)

$$\lim_{i \in \mathbb{N}} \mathrm{Sol}^r(\mathcal{R}|\mathcal{O}p\, f^{-1}(]-\infty, c_i'])) \longrightarrow \lim_{i \in \mathbb{N}} \Gamma^0(\mathcal{R}|\mathcal{O}p\, f^{-1}(]-\infty, c_i']))$$

é uma equivalência fraca (para concluir isto, é necessário usar o análogo para $c\mathcal{T}op$ da sucessão exacta de Milnor para os grupos de homotopia de limites de fibrações (ver Hatcher [8], secção 4.3) juntamente com o lema dos 5). Mas como para $i \in \mathbb{N}$ se tem um diagrama comutativo

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Sol}^r(\mathcal{R}|\mathcal{O}p\, f^{-1}(]-\infty, c'_{i+i}])) \arrow[r, "j^r"] \arrow[d] & \Gamma^0(\mathcal{R}|\mathcal{O}p\, f^{-1}(]-\infty, c'_{i+i}])) \arrow[d] \\
\mathrm{Sol}^r(\mathcal{R}|f^{-1}(]-\infty, c'_{i+i}[)) \arrow[r, "j^r"] \arrow[d] & \Gamma^0(\mathcal{R}|f^{-1}(]-\infty, c'_{i+i}[)) \arrow[d] \\
\mathrm{Sol}^r(\mathcal{R}|\mathcal{O}p\, f^{-1}(]-\infty, c'_{i}])) \arrow[r, "j^r"] \arrow[d] & \Gamma^0(\mathcal{R}|\mathcal{O}p\, f^{-1}(]-\infty, c'_{i}])) \arrow[d] \\
\mathrm{Sol}^r(\mathcal{R}|f^{-1}(]-\infty, c'_{i}[)) \arrow[r, "j^r"] & \Gamma^0(\mathcal{R}|f^{-1}(]-\infty, c'_{i}[))
\end{tikzcd}$$

conclui-se que temos um diagrama comutativo

$$\begin{tikzcd}
\lim\limits_{i\in\mathbb{N}} \mathrm{Sol}^r(\mathcal{R}|\mathcal{O}p\, f^{-1}(]-\infty, c'_{i}])) \arrow[r] \arrow[d, "\wr"'] & \lim\limits_{i\in\mathbb{N}} (\Gamma^0(\mathcal{R}|\mathcal{O}p\, f^{-1}(]-\infty, c'_{i}])) \arrow[d, "\wr"'] \\
\lim\limits_{i\in\mathbb{N}} \mathrm{Sol}^r(\mathcal{R}|f^{-1}(]-\infty, c'_{i}[)) \arrow[r] & \lim\limits_{i\in\mathbb{N}} \Gamma^0(\mathcal{R}|f^{-1}(]-\infty, c'_{i}[)) \\
\mathrm{Sol}^r(\mathcal{R}|B) \arrow[r, "j^r"] \arrow[u, "\wr"] & \Gamma^0(\mathcal{R}|B) \arrow[u, "\wr"]
\end{tikzcd}$$

(onde os isomorfismos entre as duas linhas de baixo se devem a que $f^{-1}(]-\infty, c'_i[)$ é um aberto de B para cada $i \in \mathbb{N}$ e porque $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} f^{-1}(]-\infty, c'_i[) = B$). Assim (como o morfismo horizontal no topo do diagrama é uma equivalência fraca) tem-se que a aplicação $j^r : \mathrm{Sol}^r(\mathcal{R}|B) \to \Gamma^0(\mathcal{R}|B)$ é uma equivalência fraca, ou seja, $\mathcal{R}$ satisfaz o princípio-h paramétrico.

Se $I \neq \mathbb{N}\backslash\{0\}$, reduzimos ao argumento acima para $I = \mathbb{N}\backslash\{0\}$ observando que também temos um diagrama como o de (7) (com as mesmas propriedades que aquele): sendo $m := \max I$, define-se $c'_i = c'_m + i - m$ para $i \in \mathbb{N}$ com $i > m$. Observe-se que como o princípio-h paramétrico local é válido sobre $f^{-1}(]-\infty, c'_m])$ pode provar-se por indução que também é válido sobre $f^{-1}(]-\infty, c'_i]$ para $i \in \mathbb{N}$ com $i \geq m$, usando a proposição 1.1.37 juntamente com a observação de que $f^{-1}(]-\infty, c'_{i+1}+1/2[)$ é uma vizinhança regular de $f^{-1}(]-\infty, c'_{i+1}])$ e de $f^{-1}(]-\infty, c'_i])$ (ver teorema 6.2.2 de Hirsch). Por outro lado, existem vizinhanças arbitrariamente pequenas de $f^{-1}(]-\infty, c'_{i+1}])$ (nomeadamente $f^{-1}(]-\infty, c'_{i+1}+\varepsilon[)$ para $\varepsilon \in]0, 1]$) que são vizinhanças regulares fortes de $f^{-1}(]-\infty, c'_i])$ (ver teorema 6.2.2 de Hirsch) o que nos permite aplicar o lema seguinte para concluir que as soluções de $\mathcal{R}$ são flexíveis sobre $(f^{-1}(]-\infty, c'_{i+1}]), f^{-1}(]-\infty, c'_i]))$. Assim, temos que, para $i \in \mathbb{N}$, $\mathcal{R}$ satisfaz o princípio-h paramétrico local sobre $f^{-1}(]-\infty, c'_i])$ e as soluções de $\mathcal{R}$ são flexíveis sobre $(f^{-1}(]-\infty, c'_{i+1}]), f^{-1}(]-\infty, c'_i]))$ o que é o suficiente para se ter um diagrama como (7) e repetir o argumento apresentado a seguir àquele diagrama para concluir (no caso em que $I \neq \mathbb{N} \setminus \{0\}$) que $\mathcal{R}$ satisfaz o princípio-h paramétrico. ■

1.1.51. Lema
Seja $p : E \to B$ um fibrado suave e $\mathcal{R}$ uma relação diferencial em E. Dado um par (C, C') de subespaços compactos de B tal que existem vizinhanças arbitrariamente pequenas de C que são vizinhanças regulares fortes de C'(dizemos que uma vizinhança U de C' é uma vizinhança regular forte de C' se para qualquer vizinhança V de C' existe uma isotopia $\phi : U \times [0,1] \to U$ de U tal que $\phi_1(U) \subset V$ e $\phi_t|_{V'} = \mathrm{id}_{V'}$ para $t \in [0,1]$ e alguma vizinhança V' de C'[8]), então as soluções de $\mathcal{R}$ são flexíveis sobre (C, C') se forem micro--flexíveis sobre o mesmo par.

Demonstração. A demonstração não é feita em todo o pormenor; os pormenores da demonstração deste lema são deixados ao cuidado do leitor.

Se se quiser resolver um problema de levantamento de homotopias (P é um poliedro finito)

$$\begin{tikzcd}
P \arrow[r, "f"] \arrow[d, hook, "{(\mathrm{id}_P,0)}"'] & \mathrm{Sol}^r(\mathcal{R}|\mathcal{O}p\,C) \arrow[d] \\
P \times [0,1] \arrow[r, "F"] \arrow[ur, dashed] & \mathrm{Sol}^r(\mathcal{R}|\mathcal{O}p\,C')
\end{tikzcd}$$

temos que a hipótese de micro-flexibilidade nos dá um levantamento parcial $F' : P \times [0,\varepsilon] \to \mathrm{Sol}^r(\mathcal{R}|\mathcal{O}p\,C)$ ($\varepsilon \in]0,1]$) da homotopia. Sejam $\widetilde{F}' : P \times [0,\varepsilon] \to \mathrm{Sol}^r(\mathcal{R}|V)$ um levantamento de F' para uma vizinhança V de C e $\widetilde{F} : P \times [0,1] \to \mathrm{Sol}^r(\mathcal{R}|V')$ um levantamento de F (com V' uma vizinhança de C' contida em V) tais que $\widetilde{F}|_{P\times[0,\varepsilon]}$ coincide com a composta do morfismo de restrição $\mathrm{Sol}^r(\mathcal{R}|V) \to \mathrm{Sol}^r(\mathcal{R}|V')$ com $\widetilde{F}'$ (tais levantamentos existem como se pode concluir usando a proposição 1.1.12) e a observação 1.1.21 — este argumento já se fez várias vezes anteriormente). Seja agora W uma vizinhança de C contida em V que seja uma vizinhança regular forte de C' e seja $\phi : W \times [0,1] \to W$ uma isotopia como na definição de vizinhança regular forte tal que $\phi_1(W) \subset V'$. Definimos uma homotopia $\widetilde{F}'' : P \times [0,1] \to \mathrm{Sol}^r(\mathcal{R}|W)$ por (ver a demonstração da proposição 1.1.37 para a definição do pullback):

$$\widetilde{F}''_t := (\phi_{t/\varepsilon})^*(\widetilde{F}'_t)$$

para $t \in [0,\varepsilon]$ e

$$\widetilde{F}''_t := (\phi_1)^*(\widetilde{F}_t)$$

para $t \in [\varepsilon, 1]$. Então a composta de $\widetilde{F}''$ com a aplicação de restrição $\mathrm{Sol}^r(\mathcal{R}|W) \to \mathrm{Sol}^r(\mathcal{R}|\mathcal{O}p\,C)$ dá uma solução para o problema de levantamento de homotopias inicialmente colocado. ■

1.1.52. Observação
É devido à importância da propriedade de flexibilidade na demonstração da proposição 1.1.48 e ao carácter fundamental do conceito de fibração de Serre na noção de flexibilidade que se designa por "método de levantamento de homotopias" (ou "covering homotopy method" *em inglês) a abordagem que apresentamos neste capítulo para estabelecer o princípio-h (o termo*

[8] Em particular, vizinhanças regulares fortes também são vizinhanças regulares.

"levantamento de homotopias" deriva da propriedade de levantamento de homotopias para fibrações de Serre).

1.1.53. Observação
Note-se a semelhança formal entre a demonstração acima e as demonstrações em Geiges [2] e Haefliger [7]. No entanto, as propriedades abstractas de flexibilidade aqui saem de forma simples: a demonstração depois sai por uma manipulação formal dos espaços quasi-topológicos (que estão na verdade em $c\mathcal{T}op$) envolvidos.

Note-se que as hipóteses do teorema acima sobre a micro-flexibilidade e a validade do princípio-h paramétrico local sobre um ponto são verificadas por exemplo para relações diferenciais abertas (proposição 1.1.38) pelo que para relações diferenciais abertas Diff-invariantes basta verificar a condição de flexibilidade exigida no teorema anterior. Este problema é resolvido na secção seguinte (ver teorema 1.2.19 e exemplo 1.2.16 — o resultado seguinte é uma consequência imediata) e o resultado relevante é:

1.1.54. Teorema
Sejam $p : E \to B \times \mathbb{R}$ um fibrado suave e $\mathcal{R}$ uma relação diferencial $\mathrm{Diff}(B \times \mathbb{R})$*-invariante em E. Se as soluções de $\mathcal{R}$ são micro-flexíveis então as soluções de $\mathcal{R}$ são flexíveis sobre $(C, C') \times \{0\}$ para qualquer par de subespaços compactos, (C, C') de B.*

1.1.55. Observação
Na verdade, o teorema aqui invocado (teorema 1.2.19) não necessita (nas condições acima) que $\mathcal{R}$ seja $\mathrm{Diff}(B \times \mathbb{R})$*-invariante (mas apenas de uma condição mais fraca), mas esta hipótese é suficiente para os nossos objectivos presentes.*

Consideremos agora o caso de uma relação diferencial, $\mathcal{R}$, $\mathrm{Diff}(B)$-invariante (de ordem $r \in \mathbb{N}$) num fibrado suave $p : E \to B$ sobre uma variedade sem bordo, B, de dimensão $n \in \mathbb{N}$. Suponhamos que as soluções de $\mathcal{R}$ são micro-flexíveis. O teorema acima permite-nos mostrar que para qualquer disco mergulhado (suavemente) D^k em B (com $k \in \{0, \dots, n-1\}$), as soluções de $\mathcal{R}$ são flexíveis sobre $(D^k, \partial D^k)$. Na verdade, podemos estender o mergulho $D^k \to B$ a um mergulho $\varphi : \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k} \to B$ onde consideramos a inclusão $D^k \hookrightarrow \mathbb{R}^k \times \{0\}$ (primeiro, estendemos o mergulho $D^k \to B$ a um mergulho $\phi : V \to B$ para uma vizinhança V de D^k em $\mathbb{R}^k$. Podemos sem perda de generalidade supor que $V = \mathbb{R}^k$. Dada uma vizinhança tubular de $\phi(\mathbb{R}^k)$ em B e observando que o fibrado normal a $\phi(\mathbb{R}^k)$ em B é trivial pois $\mathbb{R}^k$ é contráctil, conclui-se que a vizinhança tubular nos dá um mergulho $\varphi : \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k} \to B$). Então temos um fibrado induzido $\varphi^* p : \varphi^* E \to \mathbb{R}^n$ e um diagrama comutativo:

$$
\begin{tikzcd}
(\varphi^* E)^{(r)} \arrow[r, "\approx"'] \arrow[d, "(\varphi^*)^r_0"'] & E^{(r)}|_{\varphi(\mathbb{R}^n)} \arrow[r, hook] \arrow[d] & E^{(r)} \arrow[d, "p^r_0"] \\
\varphi^* E \arrow[r, "\approx"'] \arrow[d, "\varphi^* p"'] & E|_{\varphi(\mathbb{R}^n)} \arrow[r, hook] \arrow[d] & E \arrow[d, "p"] \\
\mathbb{R}^n \arrow[r, "\varphi", "\approx"'] & \varphi(\mathbb{R}^n) \arrow[r, hook] & B
\end{tikzcd}
$$

Seja $\varphi^*\mathcal{R}$ a relação diferencial em $\varphi^*E \to \mathbb{R}^n$ que é a imagem inversa de $\mathcal{R}$ pela composta das duas aplicações na linha de cima do diagrama (que é a aplicação natural $(\varphi^*E)^{(r)} \to E^{(r)}$). Tendo em conta os difeomorfismos indicados no diagrama acima e que φ é um difeomorfismo sobre um aberto de B, conclui-se que a flexibilidade das soluções de $\varphi^*\mathcal{R}$ sobre um par de subespaços compactos (C, C') de $\mathbb{R}^n$ é equivalente à flexibilidade das soluções de $\mathcal{R}$ sobre $(\varphi(C), \varphi(C'))$. Como as soluções de $\mathcal{R}$ são micro-flexíveis, as soluções de $\varphi^*\mathcal{R}$ também são micro-flexíveis (note-se que temos isomorfismos naturais $\mathrm{Sol}^r(\varphi^*\mathcal{R}|C) \approx \mathrm{Sol}^r(\mathcal{R}|\varphi(C))$ e $\Gamma^0(\varphi^*\mathcal{R}|C) \approx \Gamma^0(\mathcal{R}|\varphi(C))$ para qualquer compacto C de $\mathbb{R}^n$ induzidos pelos isomorfismos no diagrama acima). Por outro lado, como $\varphi^*\mathcal{R}$ é $\mathrm{Diff}(\mathbb{R}^n)$-invariante (pois $\mathcal{R}$ é $\mathrm{Diff}(B)$-invariante), temos pelo teorema 1.1.54 que as soluções de $\varphi^*\mathcal{R}$ são flexíveis sobre qualquer par de subespaços compactos de $\mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}$, em particular sobre $(D^k, \partial D^k) \times \{0\}$. Logo as soluções de $\mathcal{R}$ são flexíveis sobre a imagem de $(D^k, \partial D^k)$ em B, como se queria concluir. Temos então o seguinte teorema:

1.1.56. Teorema (Princípio-h para variedades abertas)
Seja $p : E \to B$ uma variedade aberta e $\mathcal{R}$ uma relação diferencial (de ordem $r \in \mathbb{N}$) $\mathrm{Diff}(B)$-invariante em E cujas soluções são micro-flexíveis. Então $\mathcal{R}$ verifica o princípio-h paramétrico (sobre B) se verificar o princípio-h paramétrico local nalgum subconjunto singular de B.

Demonstração. A condição de flexibilidade exigida na proposição 1.1.48 (observe-se que se supõe B aberta) é uma conclusão da discussão acima após observar que se pode supor que $\partial B = \emptyset$ (como se mostrou no início da demonstração do proposição 1.1.48). Assim, a proposição 1.1.48 aplica-se e dá a conclusão pretendida. ∎

Um corolário imediato deste teorema é dado a seguir.

1.1.57. Teorema
Sejam $p : E \to B$ um fibrado suave sobre uma variedade aberta e $\mathcal{R}$ uma relação diferencial aberta e $\mathrm{Diff}(B)$-invariante em E. Então a relação $\mathcal{R}$ satisfaz o princípio-h paramétrico.

Demonstração. Como provado anteriormente (proposições 1.1.38 e 1.1.46), as condições do teorema anterior sobre a validade do princípio-h paramétrico local num ponto e sobre a micro-flexibilidade das soluções são automáticas para relações abertas. ∎

1.1.58. Corolário
Dadas uma variedade aberta M e uma variedade N, as imersões de M para N verificam o princípio-h paramétrico (isto é, a relação diferencial de imersão no fibrado trivial $M \times N \to M$ verifica o princípio-h paramétrico).

O corolário acima mostra então parte do teorema de Smale-Hirsch. Na verdade, tendo em conta o diagrama comutativo (2) temos o seguinte resultado mais forte:

1.1.59. Teorema
Se M, N são variedades com M aberta, então a aplicação $d : \mathrm{Imm}(M, N) \to \mathrm{Mon}(TM, TN)$ é uma equivalência de homotopia fraca.

Observe-se que se M, N são variedades, então define-se em $M \times N \to M$ a relação diferencial de submersão, $\mathcal{S}$, de forma análoga à relação de imersão. Esta relação é também aberta e $\mathrm{Diff}(M)$-invariante pelo que se M for aberta verifica o princípio-h paramétrico. Restringindo adequadamente as aplicações no diagrama (1) obtém-se o diagrama comutativo seguinte:

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Sol}^1(\mathcal{S}) \arrow[r, "j^1"] & \Gamma^0(\mathcal{S}) \\ \mathrm{Sub}(M,N) \arrow[u, "i"', "\wr"] \arrow[r, "d"] & \mathrm{Epi}(TM,TN) \arrow[u, "H"', "\wr"] \end{tikzcd}$$

(onde $\mathrm{Sub}(M, N)$ designa o espaço de submersões $M \to N$ de classe C^1 com a topologia fraca-C^1 e $\mathrm{Epi}(TM, TN)$ designa o subespaço de $\mathrm{Mor}(TM, TN)$ dos morfismos de fibrados vectoriais $TM \to TN$ sobrejectivos fibra a fibra) em que as aplicações verticais são homeomorfismos. Da validade do princípio-h paramétrico no caso de M ser aberta retira-se o seguinte teorema:

1.1.60. Teorema (Phillips)
A aplicação $d : \mathrm{Sub}(M, N) \to \mathrm{Epi}(TM, TN)$ é uma equivalência de homotopia fraca para quaisquer variedades M, N com M aberta.

Em particular, tem-se o seguinte resultado curioso. Seja B uma variedade aberta de dimensão diferente de zero. Como B admite um campo vectorial que não se anula (a verificação desta afirmação é deixada ao cuidado do leitor), segue do teorema anterior que B admite uma submersão (que por regularização podemos supor suave) para $\mathbb{R}$, isto é, uma aplicação para $\mathbb{R}$ sem pontos críticos.

1.2. **Flexibilidade de feixes.**

O objectivo desta secção é colocar o princípio-h num contexto mais abstracto seguindo a secção 2.2 de Gromov [3]. Esta abstracção é razoavelmente natural visto que envolve substituir os espaços de secções por feixes (topológicos). Define-se a seguir um conceito análogo ao de feixe mas ligeiramente mais geral que aquele. Este conceito tem no entanto a vantagem de ser fechado para pullbacks por mergulhos (em condições adequadas).

1.2.1. Definição
Seja C uma categoria. Um pré-feixe *sobre um espaço X com valores em C é um functor F contravariante do conjunto parcialmente ordenado (por*

inclusão) dos abertos de X para a categoria C (note-se a relação entre esta noção e a noção de pré-feixe dada na definição 1.1.6). F diz-se um feixe *sobre X com valores em C se além disso, $F(\emptyset)$ é um objecto terminal em C e para quaisquer abertos U, V de X, o diagrama*

$$\begin{array}{ccc} F(U \cup V) & \longrightarrow & F(U) \\ \downarrow & & \downarrow \\ F(V) & \longrightarrow & F(U \cap V) \end{array}$$

é um diagrama de pullback em C.

Dado um pré-feixe F sobre um espaço X com valores em C, as aplicações $F(U) \to F(V)$ para $V \subset U$ abertos de X denominam-se de aplicações de restrição de F.

Dados pré-feixes com valores em C, F e G, sobre um espaço X, um morfismo de feixes *de F para G é uma transformação natural $F \to G$.*

1.2.2. Definição
Um feixe topológico*, F, sobre um espaço topológico X é um feixe sobre X com valores em $\mathcal{Top}$. Dado, $A \subset X$, definimos:*

$$F(A) := \operatorname*{colim}_{U \text{ viz de } A} Y(F(U))$$

(sendo o colimite tomado, por convenção, na categoria $\mathcal{Set}^{\mathcal{Top}^{\mathrm{op}}}$). Um feixe quasi-topológico*, F, sobre X é um feixe sobre X com valores em $\mathcal{Set}^{\mathcal{Top}^{\mathrm{op}}}$. Analogamente ao caso anterior, define-se o* "valor" *de F num subconjunto A de X por:*

$$F(A) := \operatorname*{colim}_{U \text{ viz de } A} F(U)$$

Diz-se que o feixe quasi-topológico F tem valores em $c\mathcal{Top}$ se $F(U) \in c\mathcal{Top}$ para qualquer aberto U de X (em particular, neste caso tem-se que para todo o subconjunto A de X, $F(A) \in c\mathcal{Top}$ pela proposição 1.1.22).

1.2.3. Observação
Por definição, um feixe F sobre um espaço X com valores numa categoria C é tal que $F(\emptyset)$ é um objecto terminal na categoria. Em particular, para feixes F topológicos/quasi-topológicos, $F(\emptyset)$ é um espaço topológico singular.

1.2.4. Observação
Observe-se que um feixe topológico é naturalmente um feixe quasi-topológico (pois o mergulho de Yoneda preserva limites). Sendo assim, daqui em diante consideram-se o conceito de feixe topológico como um caso particular do de feixe quasi-topológico e portanto as definições seguintes para feixes quasi--topológicos também se aplicam a feixes topológicos.

Observe-se ainda que um feixe quasi-topológico com valores em $c\mathcal{Top}$ é o mesmo que um feixe com valores em $c\mathcal{Top}$ (pois a inclusão $c\mathcal{Top} \to \mathcal{Set}^{\mathcal{Top}^{\mathrm{op}}}$ preserva limites e $c\mathcal{Top}$ é completa).

Podemos definir, analogamente ao feito acima, um pré-feixe quasi-topológico sobre um espaço X como sendo um pré-feixe sobre X com valores $\mathcal{Set}^{\mathcal{Top}^{\mathrm{op}}}$ (note-se que um feixe quasi-topológico é naturalmente um pré-feixe quasi-topológico) e podemos definir analogamente o "valor" do pré-feixe num qualquer subconjunto de X (estendendo a noção de "valor" para feixes quasi-

-topológicos). Dado um (pré-)feixe quasi-topológico F sobre um espaço X e uma aplicação contínua $f : Z \to X$ define-se o pullback de F por f:

$$(f^*F)(U) := F(f(U))$$

para U aberto de Z. Isto define um pré-feixe quasi-topológico sobre Z (com as aplicações de restrição óbvias induzidas pelas de F). Temos então um isomorfismo canónico $(f^*F)(A) = F(f(A))$ para qualquer subconjunto A de Z (ver secção IX.8 de Mac Lane [13]). Sob certas condições, o pullback de um feixe quasi-topológico é um feixe.

1.2.5. Proposição
Sejam X, Z espaços topológicos com Z completamente normal (ou seja, qualquer subespaço de Z é normal). Se $f : X \to Z$ é um mergulho e F é um feixe quasi-topológico sobre Z então f^*F é um feixe quasi-topológico sobre X.

Demonstração. Segue imediatamente da proposição 1.2.20 à frente. ■

1.2.6. Exemplo
Os exemplos do conceito de feixe topológico que nos interessam principalmente (tendo em vista a possibilidade de aplicação da teoria desenvolvida no seguimento a estabelecer condições para a validade do princípio-h) são os feixes de secções/soluções de uma relação diferencial de ordem $r \in \mathbb{N}$, $\mathcal{R}$, num fibrado suave $p : E \to B$: a atribuição $U \mapsto \Gamma^0(\mathcal{R}|U)$ para U aberto de B, juntamente com as aplicações de restrição entre estes espaços, define um feixe topológico $\Gamma_{\mathcal{R}}$ — o feixe das secções de $\mathcal{R}$ — sobre B. Analogamente (considerando as soluções de $\mathcal{R}$ sobre abertos) se define o feixe topológico $\mathrm{Sol}_{\mathcal{R}}$ das soluções de $\mathcal{R}$ (omite-se a referência à ordem da relação diferencial). O feixe das secções de $\mathcal{R}$ é, por definição, tal que para um subconjunto A de B, $\Gamma_{\mathcal{R}}(A) = \Gamma^0(\mathcal{R}|\mathcal{O}p\, A)$. Uma afirmação análoga vale para $\mathrm{Sol}_{\mathcal{R}}$. A aplicação $j^r : \mathrm{Sol}^r(\mathcal{R}|U) \to \Gamma^0(\mathcal{R}|U)$ define um morfismo de feixes $j^r : \mathrm{Sol}_{\mathcal{R}} \to \Gamma_{\mathcal{R}}$.

Em vista do exemplo anterior, a relação da definição seguinte com o princípio-h paramétrico (e o princípio-h paramétrico local sobre conjuntos singulares) deve ser óbvia.

1.2.7. Definição
Um morfismo $\alpha : F \to G$ entre feixes quasi-topológicos com valores em $c\mathcal{T}op$ sobre um espaço B diz-se uma equivalência fraca *se a aplicação induzida $\alpha_U : F(U) \to G(U)$ for uma equivalência fraca para cada U aberto de B. O morfismo α diz-se uma* equivalência fraca local *se a aplicação induzida $\alpha_{\{b\}} : F(\{b\}) \to G(\{b\})$ for uma equivalência fraca para cada $b \in B$.*

1.2.8. Observação
Se $p : E \to B$ é um fibrado suave e $\mathcal{R}$ é uma relação diferencial em E de ordem $r \in \mathbb{N}$, $\mathcal{R}$ satisfaz o princípio-h paramétrico sobre qualquer aberto de B sse o morfismo $j^r : \mathrm{Sol}_{\mathcal{R}} \to \Gamma_{\mathcal{R}}$ é uma equivalência fraca. Além disso, $\mathcal{R}$ verifica o princípio-h paramétrico local sobre conjuntos singulares sse $j^r : \mathrm{Sol}_{\mathcal{R}} \to \Gamma_{\mathcal{R}}$ é uma equivalência fraca local. Em particular, a proposição

1.1.38 implica que se $\mathcal{R}$ for aberta então $j^r : \mathrm{Sol}_{\mathcal{R}} \to \Gamma_{\mathcal{R}}$ é uma equivalência fraca local.

Reintroduzem-se agora as definições de flexibilidade e micro-flexibilidade para feixes.

1.2.9. Definição
Seja F um feixe quasi-topológico sobre um espaço B. Dado um par de subespaços compactos (C, C') de B, diz-se que F é flexível sobre (C, C') *(resp.* micro-flexível sobre (C, C')*) se o morfismo de restrição $F(C) \to F(C')$ é uma fibração de Serre (resp. uma micro-fibração). F diz-se flexível (resp. micro-flexível) se for flexível (resp. micro-flexível) sobre qualquer par de subespaços compactos de B.*

Note-se que no caso de um fibrado suave $p : E \to B$ com uma relação diferencial, $\mathcal{R}$, tem-se que $\Gamma_{\mathcal{R}}$ é flexível (proposição 1.1.44). Além disso, tem-se (por definição) que $\mathrm{Sol}_{\mathcal{R}}$ é flexível (resp. micro-flexível) sse as soluções de $\mathcal{R}$ são flexíveis (resp. micro-flexíveis).

A proposição seguinte corresponde então (informalmente) a uma reformulação (abstracta) da validade do princípio-h paramétrico:

1.2.10. Proposição
Sejam F, G feixes quasi-topológicos com valores em $c\mathcal{T}op$ flexíveis sobre um espaço compacto metrizável de dimensão (topológica) finita, X. Se $\alpha : F \to G$ é uma equivalência fraca local então $\alpha_X : F(X) \to G(X)$ é uma equivalência fraca.

Demonstração. Faz-se a demonstração em vários passos, demonstrando sucessivamente a proposição para vários espaços X. No decurso desta demonstração, designam-se por $r^F_{A,B} : F(A) \to F(B)$, $r^G_{A,B} : G(A) \to G(B)$ as aplicações de restrição dos feixes F e G, respectivamente, para subconjuntos A, B de X com $B \subset A$.

Comecemos por provar a proposição no caso de se ter $X = [0, 1]$. Supõe-se então $X = [0, 1]$. Queremos provar que para qualquer $l \in \mathbb{N}$ e qualquer ponto x de $F([0, 1])$ se tem que (onde $y = \alpha_{[0,1]} \circ x$)

$$(\alpha_{[0,1]})_* : \pi_l(F([0, 1]), x) \longrightarrow \pi_l(G([0, 1]), y) \tag{8}$$

é uma bijecção. Seja então $l \in \mathbb{N}$. Mostra-se a seguir que (8) é sobrejectiva. Para mostrar que é injectiva usam-se argumentos semelhantes (os pormenores são deixados ao cuidado do leitor). Seja dado um morfismo

$$f : (S^l, b) \longrightarrow (G([0, 1]), y)$$

(b é o ponto de base de S^l). Para todo o $t \in [0, 1]$, $\alpha_{\{t\}} : F(\{t\}) \to G(\{t\})$ é uma equivalência fraca e portanto, pela observação 1.1.26 tem-se então que a aplicação natural (para simplificar a notação, definem-se $x_A := r^F_{[0,1],A} \circ x$ e $y_A := r^G_{[0,1],A} \circ y = \alpha_A \circ x_A$ para $A \subset [0, 1]$)

$$\operatorname*{colim}_{V \text{ viz de } x} \pi_l(F(V), x_V) \to \operatorname*{colim}_{V \text{ viz de } x} \pi_l(G(V), y_V)$$

é uma bijecção (e em particular sobrejectiva). Desta forma (pela observação 1.1.21 e visto que os colimites acima são dirigidos), cada ponto de $[0, 1]$ tem uma vizinhança V tal que $r^G_{[0,1],V} \circ f$ representa um elemento de $\pi_l(G(V), y_V)$ que está na imagem de

$$(\alpha_V)_* : \pi_l(F(V), x_V) \longrightarrow \pi_l(G(V), y_V)$$

Seja $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ tal que qualquer intervalo de comprimento igual a $1/n$ está contido nalguma destas vizinhanças. Prova-se agora, por indução em $k \in \{1, \ldots, n\}$, que existe um morfismo $(S^l, b) \to (F([0, k/n]), x_{[0,k/n]})$ tal que a sua imagem (ou melhor a imagem do seu representante) por

$$(\alpha_{[0,k/n]})_* : \pi_l(F([0, k/n]), x_{[0,k/n]}) \longrightarrow \pi_l(G([0, k/n]), y_{[0,k/n]})$$

é o representante de $r^G_{[0,1],[0,k/n]} \circ f$. Um tal morfismo existe para $k = 1$ pela escolha que se fez para n. Suponha-se agora (passo de indução) que $k \in \{1, \ldots, n-1\}$ e que se tem um morfismo

$$f' : (S^l, b) \longrightarrow (F([0, k/n]), x_{[0,k/n]})$$

tal que existe uma homotopia pontuada

$$H : (S^l, b) \times [0, 1] \longrightarrow (G([0, k/n]), y_{[0,k/n]})$$

entre $\alpha_{[0,k/n]} \circ f'$ e $r^G_{[0,1],[0,k/n]} \circ f$. Constrói-se a seguir um morfismo

$$g : (S^l, b) \longrightarrow (F([0, (k+1)/n]), x_{[0,(k+1)/n]})$$

e uma homotopia pontuada entre $\alpha_{[0,(k+1)/n]} \circ g$ e $r^G_{[0,1],[0,(k+1)/n]} \circ f$. Sabe-se (novamente por escolha de n) que existe um morfismo

$$f'' : (S^l, b) \longrightarrow (F([k/n, (k+1)/n]), x_{[k/n,(k+1)/n]})$$

tal que existe uma homotopia pontuada

$$H' : (S^l, b) \times [0, 1] \longrightarrow (G([k/n, (k+1)/n]), y_{[k/n,(k+1)/n]})$$

entre $\alpha_{[k/n,(k+1)/n]} \circ f''$ e $r^G_{[0,1],[k/n,(k+1)/n]} \circ f$. Considerem-se agora as homotopias pontuadas

$$\begin{aligned}
H_0 &:= r^G_{[0,k/n],\{k/n\}} \circ H : (S^l, b) \times [0, 1] \longrightarrow (G(\{k/n\}), y_{\{k/n\}}) \\
H_1 &:= r^G_{[k/n,(k+1)/n],\{k/n\}} \circ H' : (S^l, b) \times [0, 1] \longrightarrow (G(\{k/n\}), y_{\{k/n\}})
\end{aligned}$$

e tome-se a concatenação, $HH : (S^l, b) \times [0, 2] \to (G(\{k/n\}), y_{\{k/n\}})$, da homotopia H_1 com a homotopia inversa de H_0 (ou seja, a homotopia H_0 percorrida em sentido contrário) — isto é possível pela proposição 1.1.20 e porque H_0 e H_1 são homotopias que terminam em $r^G_{[0,1],\{k/n\}} \circ f$. Pela *HELP* para *cTop* (visto que $\alpha_{\{k/n\}}$ é uma equivalência fraca e $S^l \times [0, 2]$ é um complexo-CW finito), existe um morfismo $HH' : S^l \times [0, 2] \to G(\{k/n\})$ tal que no diagrama seguinte, o triângulo superior comuta e o triângulo inferior comuta a menos de uma homotopia $J : (S^l \times [0, 2]) \times [0, 1] \to G(\{k/n\})$ tal que $J|_{P\times[0,1]}$ é uma homotopia constante (isto é, $J|_{P\times[0,1]} = J|_{P\times[0,1]} \circ (\mathrm{id}_P \times p)$ onde $p : [0, 1] \to [0, 1]$ é a aplicação constante igual a 0) onde

$P := (S^l \times \{0,2\}) \cup (\{b\} \times [0,2])$.

$$
\begin{tikzcd}
(S^l \times \{0,2\}) \cup (\{b\} \times [0,2]) \arrow[r, hook] \arrow[d, "h"'] & S^l \times [0,2] \arrow[d, "HH"] \arrow[dl, "HH'"'] \\
F(\{k/n\}) \arrow[r, "\alpha_{\{k/n\}}"] & G(\{k/n\})
\end{tikzcd}
\tag{9}
$$

onde h é determinada por (ver proposição 1.1.20)

$$
\begin{aligned}
h|_{S^l \times \{0\}} &= r^F_{[k/n,(k+1)/n],\{k/n\}} \circ f'' \\
h|_{S^l \times \{2\}} &= r^F_{[0,k/n],\{k/n\}} \circ f' \\
h|_{\{b\} \times [0,2]} &= x_{\{k/n\}} \circ (\{b\} \times [0,2] \to *)
\end{aligned}
$$

Em particular, tem-se que (pela definição de h) que HH' é na verdade uma homotopia pontuada $(S^l, b) \times [0,2] \to (F(\{k/n\}), x_{\{k/n\}})$.

Como $r^F_{[k/n,(k+1)/n],\{k/n\}} : F([k/n,(k+1)/n]) \to F(\{k/n\})$ é uma fibração de Serre (pois F é flexível), pela proposição 1.1.30 (note-se que a inclusão $(S^l \times \{0\}) \cup (\{b\} \times [0,2]) \hookrightarrow S^l \times [0,2]$ é uma equivalência de homotopia) existe um morfismo

$$\widetilde{HH} : S^l \times [0,2] \longrightarrow F([k/n,(k+1)/n])$$

tal que o seguinte diagrama comuta:

$$
\begin{tikzcd}
(S^l \times \{0\}) \cup (\{b\} \times [0,2]) \arrow[r, "h'"] \arrow[d, hook] & F([k/n,(k+1)/n]) \arrow[d] \\
S^l \times [0,2] \arrow[r, "HH'"] \arrow[ur, "\widetilde{HH}"] & F(\{k/n\})
\end{tikzcd}
$$

onde h' é determinada por (ver proposição 1.1.20)

$$
\begin{aligned}
h'|_{S^l \times \{0\}} &= f'' \\
h'|_{\{b\} \times [0,2]} &= x_{[k/n,(k+1)/n]} \circ (\{b\} \times [0,2] \to *)
\end{aligned}
$$

(onde se identifica $S^l \times \{0\}$ com S^l. Este tipo de idetificações será feito implicitamente no seguimento). Em particular, $\widetilde{HH}$ é uma homotopia pontuada. Observe-se que o morfismo

$$g' := \widetilde{HH}|_{S^l \times \{2\}} : (S^l, b) \longrightarrow (F([k/n,(k+1)/n]), x_{[k/n,(k+1)/n]})$$

verifica $r^F_{[k/n,(k+1)/n],\{k/n\}} \circ g' = r^F_{[0,k/n],\{k/n\}} \circ f'$ (diagrama (9)) pelo que existe (proposição 1.2.20) um morfismo

$$g : (S^l, b) \longrightarrow (F([0,(k+1)/n]), x_{[0,(k+1)/n]})$$

tal que $r^F_{[0,(k+1)/n],[k/n,(k+1)/n]} \circ g = g'$ e $r^F_{[0,(k+1)/n],[0,k/n]} \circ g = f'$ (este é o morfismo g que se pretendia construir). Como $r^G_{[k/n,(k+1)/n],\{k/n\}}$: $G([k/n,(k+1)/n]) \to F(\{k/n\})$ é uma fibração de Serre (pois G é flexível), pela proposição 1.1.30 existe um morfismo

$$\widetilde{J} : S^l \times [0,2] \times [0,1] \to G([k/n,(k+1)/n])$$

tal que o seguinte diagrama comuta:

$$\begin{tikzcd}
Q \arrow[r, "j"] \arrow[d, hook] & G([k/n,(k+1)/n]) \arrow[d] \\
S^l \times [0,2] \times [0,1] \arrow[r, "J"] \arrow[ur, "\widetilde{J}"] & G(\{k/n\})
\end{tikzcd}$$

onde

$Q = (\{b\}\times[0,2]\times[0,1])\cup(S^l\times(([0,2]\times\{0\})\cup([0,1]\times\{1\})\cup(\{0,2\}\times[0,1])))$

(observe-se que a inclusão $Q \hookrightarrow S^l \times [0,2] \times [0,1]$ é uma equivalência de homotopia) e j é determinada exigindo que:

$$\begin{aligned}
j|_{S^l\times[0,2]\times\{0\}} &= \alpha_{[k/n,(k+1)/n]} \circ \widetilde{HH} \\
j|_{S^l\times[0,1]\times\{1\}} &= H' \\
j|_{\{b\}\times[0,2]\times[0,1]} &= y_{[k/n,(k+1)/n]} \circ (\{b\} \times [0,2] \times [0,1] \to *)
\end{aligned}$$

e que $j|_{(S^l\times\{0,2\})\times[0,1]}$ seja uma homotopia constante (a construção do morfismo j recorre novamente à proposição 1.1.20). O morfismo

$$\widetilde{J}|_{S^l\times[1,2]\times\{1\}} : (S^l, b) \times [1,2] \longrightarrow (G([k/n,(k+1)/n]), y_{[k/n,(k+1)/n]})$$

(a construção de $\widetilde{J}$ — nomeadamente a definição de j — implica que o morfismo acima é uma homotopia pontuada) dá origem (compondo com $\mathrm{id}_P \times c$, onde

$$\begin{aligned}
c\colon [0,1] &\longrightarrow [1,2] \\
t &\longmapsto 2-t
\end{aligned}$$

— o que corresponde a inverter a homotopia acima) a uma homotopia pontuada

$$H'' : (S^l, b) \times [0,1] \longrightarrow (G([k/n,(k+1)/n]), y_{[k/n,(k+1)/n]})$$

que verifica:

(i) $H''|_{S^l\times\{1\}} = H'|_{S^l\times\{1\}} = r^G_{[0,1],[k/n,(k+1)/n]} \circ f$

(ii) $H''|_{S^l\times\{0\}} = \alpha_{[k/n,(k+1)/n]} \circ \widetilde{HH}|_{S^l\times\{2\}} = \alpha_{[k/n,(k+1)/n]} \circ r^F_{[0,(k+1)/n],[k/n,(k+1)/n]} \circ g$

(iii) $r^G_{[k/n,(k+1)/n],\{k/n\}} \circ H'' = H_0 = r^G_{[0,k/n],\{k/n\}} \circ H$

Do ponto (iii) segue que (usar proposição 1.2.20) existe uma homotopia pontuada

$$K : (S^l, b) \times [0,1] \longrightarrow (G([0,(k+1)/n]), y_{[0,(k+1)/n]})$$

tal que

$$\begin{aligned}
r^G_{[0,(k+1)/n],[0,k/n]} \circ K &= H \\
r^G_{[0,(k+1)/n],[k/n,(k+1)/n]} \circ K &= H''
\end{aligned}$$

e dos dois primeiros pontos segue facilmente (usando novamente a proposição 1.2.20) que K é uma homotopia entre $\alpha_{[0,(k+1)/n]} \circ g$ e $r^G_{[0,1],[0,(k+1)/n]} \circ f$. Assim, construiu-se um morfismo

$$g : (S^l, b) \to (F([0,(k+1)/n]), x_{[0,(k+1)/n]})$$

e uma homotopia pontuada entre $\alpha_{[0,(k+1)/n]} \circ g$ e $r^G_{[0,1],[0,(k+1)/n]} \circ f$, como se pretendia, o que termina a demonstração por indução.

A afirmação demonstrada acima por indução diz-nos então (tomando $k = n$) que f está na imagem de $(\alpha_{[0,1]})_* : \pi_l(F([0,1]), x) \to \pi_l(G([0,1]), y)$. Conclui-se então que $(\alpha_{[0,1]})_* : \pi_l(F([0,1]), x) \to \pi_l(G([0,1]), y)$ é sobrejectiva, como se pretendia demonstrar.

Terminada a demonstração para o caso $X = [0,1]$, demonstra-se agora por indução em $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ a proposição para $X = [0,1]^n$. O caso $n = 1$ foi provado acima. Suponha-se agora que $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ e que a proposição é válida para $X = [0,1]^n$ (hipótese de indução). Mostremos que é válida para $X = [0,1]^{n+1}$. Supõe-se então $X = [0,1]^{n+1}$. Seja $\pi : [0,1]^{n+1} \to [0,1]$ a projecção no primeiro factor. Considerem-se os feixes quasi-topológicos (com valores em $c\mathcal{T}op$) $\pi_* F$ e $\pi_* G$[9] sobre $[0,1]$. Como π é própria (e portanto também fechada) tem-se um isomorfismo natural entre $(\pi_* F)(A)$ e $F(\pi^{-1}(A))$ — e analogamente para G — para $A \subset X$. Sendo assim, os feixes $\pi_* F$ e $\pi_* G$ são flexíveis pois F e G o são (observe-se que π é própria). Por outro lado, o morfismo naturalmente induzido $\pi_*\alpha : \pi_* F \to \pi_* G$ é uma equivalência fraca local como se mostra a seguir. Em vista dos isomorfismos naturais mencionados acima, basta mostrar que, para $x \in [0,1]$, $\alpha_{\pi^{-1}(\{x\})} : F(\pi^{-1}(\{x\})) \to G(\pi^{-1}(\{x\}))$ é uma equivalência fraca. Note-se ainda que isto é equivalente a mostrar que $((i_x)^*\alpha)_{[0,1]^n} : ((i_x)^*F)([0,1]^n) \to ((i_x)^*G)([0,1]^n)$ é uma equivalência fraca (onde

$$\begin{array}{rccc} i_x : & [0,1]^n & \longrightarrow & [0,1]^{n+1} \\ & (x_1, \ldots, x_n) & \longmapsto & (x, x_1, \ldots, x_n) \end{array}$$

). Mas $((i_x)^*F)$, $((i_x)^*G)$ são feixes quasi-topológicos com valores em $c\mathcal{T}op$ flexíveis (pois F e G são flexíveis) sobre $[0,1]^n$ e $(i_x)^*\alpha : ((i_x)^*F) \to ((i_x)^*G)$ é uma equivalência fraca local (pois α é uma equivalência fraca local). Assim, por hipótese de indução, conclui-se que

$$((i_x)^*\alpha)_{[0,1]^n} : ((i_x)^*F)([0,1]^n) \longrightarrow ((i_x)^*G)([0,1]^n)$$

é uma equivalência fraca. Desta forma se conclui (como se pretendia) que $\pi_*\alpha : \pi_* F \to \pi_* G$ é uma equivalência fraca local. Como os feixes $\pi_* F$ e $\pi_* G$ sobre $[0,1]$ são flexíveis, retira-se do primeiro caso demonstrado ($X = [0,1]$) que $(\pi_*\alpha)_{[0,1]} : (\pi_* F)([0,1]) \to (\pi_* G)([0,1])$ é uma equivalência fraca. Equivalentemente, $\alpha_{[0,1]^{n+1}} : F([0,1]^{n+1}) \to G([0,1]^{n+1})$ é uma equivalência fraca. Isto mostra que a proposição é válida para $X = [0,1]^{n+1}$ e termina a demonstração por indução.

Já sabemos então que a proposição é válida no caso de ser $X = [0,1]^n$ para algum $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Passemos agora ao caso geral. Seja então X

[9] Dados espaços topológicos X e Z, uma função contínua $f : X \to Z$ e um feixe F sobre X define-se o feixe quasi-topológico $f_* F$ sobre Z da seguinte forma:

$$(f_* F)(U) = F(f^{-1}(U))$$

para U aberto de Z com as aplicações de restrição óbvias (é imediato que $f_* F$ é um feixe quasi-topológico). É fácil ver que se f é fechada então existe um isomorfismo natural entre $(f^* F)(A)$ e $F(f^{-1}(A))$ para qualquer $A \subset Z$.

um espaço compacto metrizável de dimensão topológica finita. Sabe-se que neste caso, existe um mergulho $i : X \to [0,1]^n$ para algum $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Considerem-se os feixes quasi-topológicos (com valores em $c\mathcal{Top}$) i_*F e i_*G sobre $[0,1]^n$. Estes feixes são flexíveis (pois F e G são flexíveis e porque a aplicação i é própria — e em particular também fechada). Por outro lado, a aplicação $i_*\alpha : i_*F \to i_*G$ é uma equivalência fraca local (pois α é uma equivalência fraca local e porque a aplicação i é própria e injectiva). Assim, pela validade já demonstrada da proposição para o espaço $[0,1]^n$, segue que $(i_*\alpha)_{[0,1]^n} : (i_*F)([0,1]^n) \to (i_*G)([0,1]^n)$ é uma equivalência fraca e portanto $\alpha_X : F(X) \to G(X)$ também é uma equivalência fraca. Demonstrou-se assim a proposição para X como se pretendia. ■

1.2.11. Definição
Sejam X um espaço topológico e F um feixe quasi-topológico sobre X. Diz-se que F preserva limites crescentes se para qualquer sucessão $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de abertos de X tal que $V_n \subset V_{n+1}$ para $n \in \mathbb{N}$ se tem que

$$F\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} V_n\right) = \lim_{n\in\mathbb{N}} F(V_n)$$

(onde o limite na direita é tomado em $\mathcal{Set}^{\mathcal{Top}^{op}}$ relativamente às aplicações de restrição do feixe F).

1.2.12. Observação
Observe-se que qualquer "feixe" no sentido usual do termo (ao invés da definição que se considera nesta exposição) preserva limites crescentes.

A proposição anterior tem a seguinte generalização simples ao caso de espaços não compactos.

1.2.13. Teorema (Teorema do homomorfismo de feixes)
Sejam F, G feixes quasi-topológicos com valores em $c\mathcal{Top}$ flexíveis sobre um espaço, X, localmente compacto Hausdorff com base contável de dimensão (topológica) finita. Se $\alpha : F \to G$ é uma equivalência fraca local e F, G preservam limites crescentes então $\alpha : F \to G$ é uma equivalência fraca.

Demonstração. Seja U um aberto de X. Como X é localmente compacto Hausdorff e tem base contável, existem uma sucessão de compactos $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de U e uma sucessão de abertos $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de abertos de U tais que $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} V_n = U$ e para qualquer $n \in \mathbb{N}$ se tem $K_n \subset V_n \subset K_{n+1}$. Conclui-se então que $\lim_{n\in\mathbb{N}} F(K_n) = \lim_{n\in\mathbb{N}} F(V_n)$ e que $\lim_{n\in\mathbb{N}} G(K_n) = \lim_{n\in\mathbb{N}} G(V_n)$. Por outro lado, como F, G preservam limites crescentes sabe-se que $\lim_{n\in\mathbb{N}} F(V_n) = F(U)$ e $\lim_{n\in\mathbb{N}} G(V_n) = G(U)$. Portanto tem-se que $\lim_{n\in\mathbb{N}} F(K_n) = F(U)$ e $\lim_{n\in\mathbb{N}} G(K_n) = G(U)$. Note-se agora que temos um diagrama comutativo:

$$
\begin{tikzcd}
\vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] \\
F(K_{n+1}) \arrow[r, "\alpha_{K_{n+1}}"] \arrow[d] & G(K_{n+1}) \arrow[d] \\
F(K_n) \arrow[r, "\alpha_{K_n}"] \arrow[d] & G(K_n) \arrow[d] \\
\vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] \\
F(K_1) \arrow[r, "\alpha_{K_1}"] \arrow[d] & G(K_1) \arrow[d] \\
F(K_0) \arrow[r, "\alpha_{K_0}"] & G(K_0)
\end{tikzcd} \tag{10}
$$

em que todos os morfismos verticais são fibrações de Serre (pois F e G são flexíveis). Por outro lado, os morfismos horizontais são equivalências fracas, como se mostra a seguir. Seja dado $n \in \mathbb{N}$ e seja $i_n : K_n \to X$ a inclusão. Então $(i_n)^*F$ e $(i_n)^*G$ são feixes quasi-topológicos (observe-se que X é completamente normal pois é metrizável) flexíveis (pois F e G são flexíveis) e o morfismo $(i_n)^*\alpha_n : (i_n)^*F \to (i_n)^*G$ (definido da forma natural) é uma equivalência fraca local (pois α é uma equivalência fraca local). Sendo assim, pela proposição 1.2.10 (como K_n é metrizável e tem dimensão topológica finita), conclui-se que $((i_n)^*\alpha_n)_{K_n} : ((i_n)^*F)(K_n) \to ((i_n)^*G)(K_n)$ é uma equivalência fraca. Por outro lado temos um diagrama comutativo:

$$
\begin{tikzcd}
((i_n)^*F)(K_n) \arrow[r, "((i_n)^*\alpha_n)_{K_n}"] & ((i_n)^*G)(K_n) \\
F(K_n) \arrow[u, "\wr"] \arrow[r, "\alpha_{K_n}"] & G(K_n) \arrow[u, "\wr"']
\end{tikzcd}
$$

(em que as setas verticais são os isomorfismos canónicos) e portanto o morfismo $\alpha_{K_n} : F(K_n) \to G(K_n)$ é uma equivalência fraca.

Desta forma, no diagrama (10) os morfismos verticais são fibrações de Serre e os morfismos horizontais são equivalências fracas. Assim, pela sucessão exacta de Milnor para *cTop* — ver demonstração da proposição 1.1.48 — juntamente com uma aplicação do lema dos 5, conclui-se que a aplicação induzida (pelos α_{K_n} para $n \in \mathbb{N}$) no limite

$$F(U) = \lim_{n\in\mathbb{N}} F(K_n) \to \lim_{n\in\mathbb{N}} G(K_n) = G(U)$$

é uma equivalência fraca. No entanto, esta aplicação é dada por $\alpha_U : F(U) \to G(U)$. Assim, conclui-se que α_U é uma equivalência fraca para qualquer U aberto de X e portanto $\alpha : F \to G$ é uma equivalência fraca. ■

O seguinte resultado é um corolário imediato do teorema do homomorfismo de feixes e dá um critério para a validade do princípio-h.

1.2.14. Corolário
Seja $p : E \to B$ um fibrado suave e $\mathcal{R}$ uma relação diferencial em E. Se $\mathcal{R}$ satisfaz o princípio-h paramétrico local sobre subconjuntos singulares de B e as soluções de $\mathcal{R}$ são flexíveis então $\mathcal{R}$ satisfaz o princípio-h paramétrico sobre qualquer aberto de B.

Demonstração. Das hipóteses sai imediatamente que $\mathrm{Sol}_{\mathcal{R}}$ é um feixe topológico flexível e que a aplicação $j^r : \mathrm{Sol}_{\mathcal{R}} \to \Gamma_{\mathcal{R}}$ é uma equivalência fraca local. Como $\Gamma_{\mathcal{R}}$ é flexível e tanto $\mathrm{Sol}_{\mathcal{R}}$ como $\Gamma_{\mathcal{R}}$ preservam limites crescentes, conclui-se do teorema anterior que j^r é uma equivalência fraca, de onde segue imediatamente a conclusão pretendida. ∎

Na primeira secção introduziu-se a noção de relação diferencial Diff-invariante que se mostrou significativa no sentido em que a Diff-invariância é uma condição (fundamental) no teorema 1.1.56. No contexto dos feixes, a noção relevante é a seguinte:

1.2.15. Definição
Seja B uma variedade e F um feixe quasi-topológico sobre B. Diz-se que F é $\mathrm{Diff}(B)$-invariante *se para cada U, V abertos de B se tem um morfismo:*

$$\Phi_{U,V} : (\mathrm{Diff}(B) \cap C^{\infty}(U,V)) \times F(V) \to F(U)$$

(em $\mathrm{Diff}(B) \cap C^{\infty}(U,V)$ considera-se a topologia de subespaço de $C^{\infty}(U,V)$ com a topologia fraca-C^{∞}) tal que para quaisquer U, V, W abertos de B (abrevia-se $\mathrm{Diff}(B) \cap C^{\infty}(U',V')$ por $\mathcal{D}(U',V')$ para abertos U', V' de B):

1. *a composta (onde $*$ é um espaço só com um ponto e $\{\mathrm{id}_U\} : * \to \mathcal{D}(U,U)$ é (constante e) igual a id_U):*

$$F(U) = * \times F(U) \xrightarrow{\{\mathrm{id}_U\}\times \mathrm{id}_{F(U)}} \mathcal{D}(U,U) \times F(U) \xrightarrow{\Phi_{U,U}} F(U)$$

   é a identidade de $F(U)$ (no caso de F ser um feixe topológico, esta propriedade é equivalente a afirmar que para $s \in F(U)$, $\Phi_{U,U}(\mathrm{id}_U, s) = s$).

2. *o diagrama*

$$\begin{tikzcd} \mathcal{D}(U,V) \times \mathcal{D}(V,W) \times F(W) \arrow[r, "\mathrm{id}_{\mathcal{D}(U,V)} \times \Phi_{V,W}"] \arrow[d, "comp \times \mathrm{id}_{F(W)}"] & \mathcal{D}(U,V) \times F(V) \arrow[d, "\Phi_{U,V}"] \\ \mathcal{D}(U,W) \times F(W) \arrow[r, "\Phi_{U,W}"] & F(U) \end{tikzcd}$$

   comuta ($comp : \mathcal{D}(U,V) \times \mathcal{D}(V,W) \to \mathcal{D}(U,W)$ é a composição) — no caso de F ser um feixe topológico, esta propriedade afirma que para $f \in \mathcal{D}(U,V)$, $g \in \mathcal{D}(V,W)$ e $s \in F(W)$ se tem $\Phi_{U,W}(g \circ f, s) = \Phi_{U,V}(f, \Phi_{V,W}(g,s))$.

3. *o seguinte diagrama comuta (supõe-se que $U \subset V$)*

$$\begin{tikzcd} \mathcal{D}(V,W) \times F(W) \arrow[r, "\Phi_{V,W}"] \arrow[d, "r \times \mathrm{id}_{F(W)}"] & F(V) \arrow[d] \\ \mathcal{D}(U,W) \times F(W) \arrow[r, "\Phi_{U,W}"] & F(U) \end{tikzcd}$$

onde a seta vertical da direita é dada pela restrição em F e

$$\begin{aligned} r : \mathcal{D}(V,W) &\longrightarrow \mathcal{D}(U,W) \\ f &\longmapsto f|_U \end{aligned}$$

4. *se $V \subset W$ então o seguinte diagrama comuta*

$$\begin{tikzcd} \mathcal{D}(U,V)\times F(W) \arrow[r, "i\times \mathrm{id}_{F(W)}"] \arrow[d, "\mathrm{id}_{\mathcal{D}(U,V)}\times r^F_{W,V}"] & \mathcal{D}(U,W)\times F(W) \arrow[d, "\Phi_{U,W}"] \\ \mathcal{D}(U,V)\times F(V) \arrow[r, "\Phi_{U,V}"] & F(U) \end{tikzcd}$$

onde $i : \mathcal{D}(U,V) \to \mathcal{D}(U,W)$ é a inclusão e $r^F_{W,V} : F(W) \to F(V)$ é o morfismo de restrição de F.

1.2.16. Exemplo

Se $p : E \to B$ é um fibrado suave e $\mathcal{R}$ é uma relação diferencial $\mathrm{Diff}(B)$-invariante de ordem $r \in \mathbb{N}$ em E, então o feixe topológico $\mathrm{Sol}_{\mathcal{R}}$ é $\mathrm{Diff}(B)$-invariante: sendo Φ uma extensão contínua de E tal que $\mathcal{R}$ é invariante por Φ^r então podemos definir as aplicações requeridas na definição anterior da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \Phi_{U,V} : (\mathrm{Diff}(B)\cap C^\infty(U,V)) \times \mathrm{Sol}_{\mathcal{R}}(V) &\longrightarrow \mathrm{Sol}_{\mathcal{R}}(U) \\ (f,s) &\longmapsto \Phi(f^{-1})\circ s\circ f = f^*s \end{aligned}$$

para U, V abertos de B. Observe-se (embora isto não seja necessário no seguimento) que a acção de Φ^r permite mostrar analogamente que $\Gamma_{\mathcal{R}}$ é $\mathrm{Diff}(B)$-invariante.

A noção apresentada na definição acima tem uma generalização óbvia (nas condições da definição) ao conceito de S-invariância onde S é um pseudo-grupo de difeomorfismos de B (a definição é dada a seguir) — esta generalização envolve apenas substituir na definição acima todas as aparições de $\mathrm{Diff}(B)$ por S. Por simplicidade, não se apresentou a definição acima nesta generalidade. No entanto, assume-se esta generalização (óbvia) no seguimento, visto que será necessária em breve.

1.2.17. Definição

Seja B uma variedade. Um pseudo-grupo de difeomorfismos de B é um subconjunto, S, de $\mathrm{Diff}(B)$ tal que:

- $\mathrm{id}_U \in S$ *para qualquer aberto U de B.*
- *Se $f \in S$ então $f^{-1} \in S$.*
- *Se $f, g \in S$ são tais que $f \circ g$ está definida (isto é, a imagem de g está contida no domínio de f) então $f \circ g \in S$.*

1.2.18. Observação

Esta definição de pseudo-grupo de difeomorfismos é ligeiramente menos restritiva que a definição apresentada em Geiges [2].

Note-se também que a condição sobre a inversão na definição de pseudo-grupo de difeomorfismos não é relevante na definição de feixe invariante.

Dadas variedades M, N e uma aplicação suave $\pi : M \to N$, considere-se o pseudo-grupo $\mathrm{Diff}(M,\pi)$ de difeomorfismos de M constituído pelos difeomorfismos ϕ entre abertos de M tais que $\pi \circ \phi = \pi$ (no domínio de

ϕ). É importante considerar o caso de feixes quasi-topológicos (sobre M) $\mathrm{Diff}(M,\pi)$-invariantes como mostra o seguinte teorema (que já foi usado na demonstração do teorema 1.1.56):

1.2.19. Teorema (Teorema da flexibilidade)
Seja B uma variedade e sejam $\pi : B\times\mathbb{R} \to B$ a projecção no primeiro factor e

$$\begin{aligned} i : B &\longrightarrow B\times\mathbb{R} \\ x &\longmapsto (x,0) \end{aligned}$$

Se F é um feixe quasi-topológico com valores em $c\mathcal{T}op$ sobre $B\times\mathbb{R}$ que é micro-flexível e $\mathrm{Diff}(B\times\mathbb{R},\pi)$-invariante então i^*F é um feixe flexível sobre B.

Apresenta-se a seguir a demonstração deste teorema. Nesta prova, segue-se de perto a demonstração dada do mesmo teorema na secção 2.2.3 de Gromov [3]. A demonstração é feita através de uma sucessão de definições e lemas.

Precisamos primeiro de uma generalização imediata da proposição 1.1.13.

1.2.20. Proposição
Seja F um feixe quasi-topológico sobre um espaço completamente normal X (ou seja, qualquer subespaço de X é normal) e sejam $A, B\subset X$ tais que A, B são fechados (resp. abertos) em $A\cup B$. Então o diagrama (onde todas as aplicações são induzidas por restrição)

$$\begin{tikzcd} F(A\cup B) \arrow[r] \arrow[d] & F(A) \arrow[d] \\ F(B) \arrow[r] & F(A\cap B) \end{tikzcd}$$

é um diagrama de pullback em $\mathcal{S}et^{\mathcal{T}op^{\mathrm{op}}}$.

Demonstração. Basta observar que

$$\begin{tikzcd} F(U\cup V) \arrow[r] \arrow[d] & F(U) \arrow[d] \\ F(V) \arrow[r] & F(U\cap V) \end{tikzcd}$$

é um diagrama de pullback em $\mathcal{S}et^{\mathcal{T}op^{\mathrm{op}}}$ (por definição de feixe quasi-topológico) para quaisquer U, V vizinhanças de A, B respectivamente. Logo (pela proposição 1.1.9 — pullbacks são calculados pontualmente) tem-se que

$$\begin{tikzcd} F(U\cup V)(Z) \arrow[r] \arrow[d] & F(U)(Z) \arrow[d] \\ F(V)(Z) \arrow[r] & F(U\cap V)(Z) \end{tikzcd}$$

é um diagrama de pullback para qualquer espaço topológico Z. Assim, fazendo o colimite nas vizinhanças U de A e V de B obtém-se que (aplica-se novamente a proposição 1.1.9)

$$\begin{tikzcd} F(A \cup B)(Z) \arrow[r] \arrow[d] & F(A)(Z) \arrow[d] \\ F(B)(Z) \arrow[r] & F(A \cap B)(Z) \end{tikzcd}$$

é um diagrama de pullback para qualquer $Z \in \mathcal{Top}$ (nesta última passagem usou-se a proposição IX.2.1 de Mac Lane [13] para se poder concluir que em $\mathcal{Set}$ o colimite (dirigido) dos pullbacks é o pullback dos colimites. Também se usou a normalidade completa de X para colocar $F(A \cap B)(Z)$ no canto inferior direito do diagrama acima — visto que dada uma vizinhança W de $A \cap B$ existem então vizinhanças U, V de A e B, respectivamente, tais que $U \cap V = W$.). Uma última aplicação da proposição 1.1.9 dá o resultado. ■

Podemos agora iniciar o caminho para a demonstração do teorema da flexibilidade. É importante observar que a demonstração a seguir tem um carácter razoavelmente abstracto, em grande parte devido ao uso de feixes quasi-topológicos, o que pode debilitar a capacidade do leitor de extrair as intuições por trás de cada argumento. Sendo assim, o leitor é convidado a interpretar os argumentos seguintes no caso de feixes topológicos para pesquisar e analisar os passos relevantes por trás de cada argumento.

Antes de continuar, são necessárias algumas convenções e definições. Dado um feixe quasi-topológico, F, sobre um espaço X e dados $A, B \subset X$ com $B \subset A$, convencionamos designar por $r^F_{A,B} : F(A) \to F(B)$ a aplicação de restrição. Dados uma aplicação contínua $f : Z \to X$ e subconjuntos $A \subset X$ e $B \subset Z$ tais que $f(B) \subset A$, convencionamos ainda designar por $r^{F,f^*F}_{A,B} : F(A) \to (f^*F)(B)$ o morfismo natural induzido por restrição (observe-se que identificando $(f^*F)(B)$ com $F(f(B))$, este morfismo coincide com $r^F_{A,f(B)}$).

1.2.21. Definição
Seja F um feixe quasi-topológico sobre um espaço X e seja A um subconjunto de B. Uma deformação *de F sobre A é um morfismo $\psi : P \times [a,b] \to F(A)$ (com P um poliedro finito e $a, b \in \mathbb{R}$ tais que $b > a$). Diz-se que a deformação ψ* está fixa *num conjunto $B \subset A$ se $r^F_{A,B} \circ \psi = r^F_{A,B} \circ \psi \circ (\mathrm{id}_P \times pr_{[a,b]})$ (intuitivamente, isto quer dizer que a deformação não se mexe sobre B) onde definimos (de uma vez por todas)*

$$\begin{aligned} pr_{[a,b]} : [a,b] &\longrightarrow [a,b] \\ t &\longmapsto a \end{aligned}$$

1.2.22. Observação
Como é óbvio, se a deformação ψ na definição anterior está fixa sobre um conjunto $B \subset A$ também está fixa sobre qualquer subconjunto de B.

1.2.23. Definição
Seja F um feixe quasi-topológico sobre um espaço X e seja $A \subset X$. Uma deformação $\psi : P \times [a,b] \to F(A)$ de F sobre A diz-se compressível *se existe um levantamento (ver proposição 1.1.11) $\widetilde{\psi} : P \times [a,b] \to F(U)$ de ψ (para alguma vizinhança U de A) tal que para qualquer vizinhança V de A existe uma deformação $\overline{\psi} : P \times [a,b] \to F(U)$ tal que:*

(i) $r^F_{U,A} \circ \overline{\psi} = \psi$;

(ii) $\overline{\psi}|_{P\times\{a\}} = \widetilde{\psi}|_{P\times\{a\}}$;

(iii) $\overline{\psi}$ *está fixa sobre* $U \setminus V$.

1.2.24. Observação
Se uma deformação $\psi : P \times [a,b] \to F(A)$ *(nas condições da definição acima) for compressível, é imediato que* $\psi \circ (f \times \mathrm{id}_{[a,b]}) : Q \times [a,b] \to F(A)$ *é compressível para qualquer aplicação* $f : Q \to P$ *entre poliedros finitos. Além disso se* ψ *for compressível,* $\psi|_{P\times[a,t]}$ *é compressível para qualquer* $t \in [a,b]$.

A definição de compressibilidade é importante em vista da proposição seguinte.

1.2.25. Proposição
Seja F *um feixe quasi-topológico sobre um espaço localmente compacto e completamente normal* X*.* F *é flexível sse para qualquer subespaço compacto* C *de* X*, qualquer deformação de* F *sobre* C *é compressível.*

Demonstração. Suponhamos primeiro que F é flexível e sejam C um subespaço compacto de X e $\psi : P \times [a,b] \to F(C)$ uma deformação de F sobre C. Seja $\widetilde{\psi} : P \times [a,b] \to F(U)$ um levantamento de ψ (para alguma vizinhança U de C em X) e seja V uma vizinhança de C tal que $\overline{V}$ é compacto e está contido em U. Sabemos (proposição 1.2.20) que o seguinte diagrama

$$\begin{tikzcd} F(C \cup (\overline{V} \setminus V)) \arrow[r] \arrow[d] & F(\overline{V} \setminus V) \arrow[d] \\ F(C) \arrow[r] & * \end{tikzcd}$$

é um diagrama de pullback em $\mathcal{S}et^{\mathcal{T}op^{\mathrm{op}}}$ (observe-se que $C \cap (\overline{V} \setminus V) = \emptyset$). Em particular, podemos definir uma deformação $\psi' : P \times [a,b] \to F(C \cup (\overline{V} \setminus V))$ exigindo que $r^F_{C\cup(\overline{V}\setminus V),C} \circ \psi' = \psi$ e $r^F_{C\cup(\overline{V}\setminus V),\overline{V}\setminus V} \circ \psi' = r^F_{U,\overline{V}\setminus V} \widetilde{\psi} \circ (\mathrm{id}_P \times pr_{[a,b]})$ (de modo a que a deformação assim obtida esteja fixa sobre $\overline{V} \setminus V$). Por outro lado a aplicação de restrição $F(\overline{V}) \to F(C \cup (\overline{V} \setminus V))$ é uma fibração de Serre (pois F é flexível) pelo que podemos levantar a deformação ψ' a uma deformação $\psi'' : P \times [a,b] \to F(\overline{V})$ (que está necessariamente fixa sobre $\overline{V} \setminus V$) tal que $\psi''|_{P\times\{a\}} = r^F_{U,\overline{V}} \circ \widetilde{\psi}|_{P\times\{a\}}$. Assim, como o diagrama

$$\begin{tikzcd} F(U) \arrow[r] \arrow[d] & F(\overline{V}) \arrow[d] \\ F(U \setminus V) \arrow[r] & F(\overline{V} \setminus V) \end{tikzcd}$$

é um diagrama de pullback temos que a deformação ψ'' levanta a uma deformação, $\overline{\psi}$ de F sobre U tal que $r^F_{U,U\setminus V} \circ \overline{\psi} = r^F_{U,U\setminus V} \circ \widetilde{\psi} \circ (\mathrm{id}_P \times pr_{[a,b]})$. Então $\overline{\psi}$ verifica as condições (i)-(iii) (para verificar a condição (ii) basta usar o facto de o último diagrama ser de pullback) na definição de compressibilidade e em particular conclui-se que ψ é compressível.

Suponhamos agora que para qualquer subespaço compacto C de X, qualquer deformação de F sobre C é compressível. Seja dado um par de subespaços compactos (C, C') de X e seja

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, "g"] \arrow[d, hook, "(\mathrm{id}_P, 0)"'] & F(C) \arrow[d] \\ P \times [0,1] \arrow[r, "\psi"] & F(C') \end{tikzcd}$$

um diagrama comutativo em $\mathcal{S}et^{\mathcal{T}op^{\mathrm{op}}}$. ψ é uma deformação de F sobre C' e portanto é compressível. Seja então $\widetilde{\psi} : P \times [0,1] \to F(U)$ um levantamento de ψ como na definição de compressibilidade para ψ (U é alguma vizinhança de C'). Seja $\widetilde{g} : P \to F(V)$ um levantamento de g (para alguma vizinhança V de C). Como (pela comutatividade do diagrama acima — por simplificação, identificamos P com $P \times \{a\}$) $r^F_{U,C'} \circ \widetilde{\psi}|_{P\times\{a\}} = r^F_{V,C'} \circ \widetilde{g}$ concluímos (pela proposição 1.1.11 e pela observação 1.1.21) que

$$r^F_{U,W'} \circ \widetilde{\psi}|_{P\times\{a\}} = r^F_{V,W'} \circ \widetilde{g} \tag{11}$$

para alguma vizinhança W' de C' contida em V. Seja W uma vizinhança de C' tal que $\overline{W} \subset W'$. Seja então $\overline{\psi}$ uma deformação de F sobre U como na definição de compressibilidade para ψ ($\widetilde{\psi}$ já foi escolhido antes) tal que $\overline{\psi}$ está fixa sobre $U \setminus W$. Definimos uma deformação $\psi' : P \times [0,1] \to F(V)$ exigindo que $r^F_{V,\overline{W}} \circ \psi' = r^F_{U,\overline{W}} \circ \overline{\psi}$ e $r^F_{V,V\setminus W} \circ \psi' = r^F_{V,V\setminus W} \circ \widetilde{g} \circ p$ (onde $p : P \times [0,1] \to P$ é a projecção no primeiro factor) o que é possível pois

$$\begin{tikzcd} F(V) \arrow[r] \arrow[d] & F(\overline{W}) \arrow[d] \\ F(V \setminus W) \arrow[r] & F(\overline{W} \setminus W) \end{tikzcd}$$

é um diagrama de pullback (note-se que se usa a propriedade (ii) da definição de compressibilidade, a equação (11) e o facto de $\overline{\psi}$ estar fixa sobre $U \setminus W$ para concluir que $r^F_{U,\overline{W}\setminus W} \circ \overline{\psi} = r^F_{V,\overline{W}\setminus W} \circ g \circ p$, igualdade que mostra que podemos definir ψ' como acima visto que o diagrama anterior é de pullback). Então ψ' faz o seguinte diagrama comutar (a comutatividade do triângulo superior resulta da equação (11) e de o diagrama anterior ser de pullback; a comutatividade do triângulo inferior é imediata da definição de ψ'):

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, "\widetilde{g}"] \arrow[d, hook, "(\mathrm{id}_P, 0)"'] & F(V) \arrow[d] \\ P \times [0,1] \arrow[r, "\psi"] \arrow[ur, "\psi'"] & F(C') \end{tikzcd}$$

Assim, o seguinte diagrama comuta para $\varphi = r^F_{V,C} \circ \psi'$

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, "g"] \arrow[d, hook, "(\mathrm{id}_P, 0)"'] & F(C) \arrow[d] \\ P \times [0,1] \arrow[r, "\psi"] \arrow[ur, "\varphi"] & F(C') \end{tikzcd}$$

Em síntese, conclui-se que a aplicação de restrição $r^F_{C,C'} : F(C) \to F(C')$ é uma fibração de Serre (para qualquer par de subespaços compactos (C, C') de X). Logo F é flexível. ■

Define-se agora a noção de micro-compressibilidade (cuja relação com a noção de compressibilidade pode ser reminiscente da relação entre as noções de micro-flexibilidade e de flexibilidade de feixes).

1.2.26. Definição
Seja F um feixe quasi-topológico sobre um espaço X. Uma deformação $\psi : P \times [a, b] \to F(A)$ de F sobre um subespaço A de X diz-se micro-compressível *se existe $\varepsilon \in]0, b-a]$ tal que $\psi|_{P\times[a,a+\varepsilon]}$ é compressível.*

A seguinte proposição é fundamental.

1.2.27. Proposição
Seja X um espaço localmente compacto e completamente normal. Seja F um feixe quasi-topológico sobre X com valores em $c\mathcal{T}op$. F é flexível sse para qualquer subespaço compacto C de X, qualquer deformação de F sobre C é micro-compressível.

Demonstração. Em vista da proposição anterior, uma das implicações é imediata e para provar a outra basta provar que micro-compressibilidade implica compressibilidade. Mais precisamente, é necessário provar que, sendo C um subespaço compacto de X, se qualquer deformação de F sobre C é micro-compressível, então qualquer deformação de F sobre C é, na verdade, compressível. Supomos então que qualquer deformação de F sobre C é micro-compressível. Seja $\psi : P \times [a, b] \to F(C)$ uma deformação de F sobre C. Queremos provar que ψ é compressível. Consideremos a deformação $\eta : Q \times [0, 1] \to F(C)$ onde $Q = P \times [a, b]$ definida por $\eta := \psi \circ f$ onde $f : Q \times [0, 1] \to P \times [a, b]$ é dada por:

$$\begin{aligned} f : P \times [a, b] \times [0, 1] &\longrightarrow P \times [a, b] \\ (p, t, \tau) &\longmapsto (p, \min\{y, y + \tau\}) \end{aligned}$$

Como η é micro-compressível, existe $\varepsilon \in]0, 1]$ tal que $\eta|_{Q\times[0,\varepsilon]}$ é compressível. Logo, para $t \in [a, b]$, $\eta|_{(P\times\{t\})\times[0,\varepsilon]}$ é compressível (ver observação 1.2.24) pelo que $\eta|_{(P\times\{t\})\times[0,\min\{\varepsilon,b-t\}]}$ é compressível ou, equivalentemente (como segue imediatamente da definição de f), $\psi|_{P\times[t,\min\{t+\varepsilon,b\}]}$ é compressível. Desta forma, $\psi|_{P\times[s,t]}$ é compressível para qualquer sub-intervalo $[s, t]$ de $[a, b]$ de comprimento menor ou igual a ε. Um argumento indutivo simples reduz então a demonstração da compressibilidade de ψ à validade da seguinte afirmação:

Sejam $s, t \in [a, b]$ com $t > s$. Se $\psi|_{P\times[a,s]}$ e $\psi|_{P\times[s,t]}$ são compressíveis então $\psi|_{P\times[a,t]}$ é compressível.

Procede-se agora à demonstração desta afirmação. Como

$$\psi_0 := \psi|_{P\times[a,s]} : P \times [a, s] \longrightarrow F(C)$$
$$\psi_1 := \psi|_{P\times[s,t]} : P \times [s, t] \longrightarrow F(C)$$

são compressíveis, existem (por definição de compressibilidade) levantamentos $\widetilde{\psi_0} : P \times [a, s] \to F(U)$, $\widetilde{\psi_1} : P \times [s, t] \to F(U)$ de ψ_0, ψ_1 respectivamente (supõe-se por simplificação, e sem perda de generalidade, que os levantamentos estão definidos numa mesma vizinhança U de C — se estiverem definidos em vizinhanças diferentes compõe-se cada um deles com a restrição no feixe F à intersecção das duas vizinhanças) tais que para qualquer vizinhança V de C existem deformações $\overline{\psi_0} : P \times [a,s] \to F(U)$, $\overline{\psi_1} : P \times [s,t] \to F(U)$ tais que:

(i) $r^F_{U,C} \circ \overline{\psi_0} = \psi_0$ e $r^F_{U,C} \circ \overline{\psi_1} = \psi_1$;

(ii) $\overline{\psi_0}|_{P\times\{a\}} = \widetilde{\psi_0}|_{P\times\{a\}}$ e $\overline{\psi_1}|_{P\times\{s\}} = \widetilde{\psi_1}|_{P\times\{s\}}$;

(iii) $\overline{\psi_0}$ e $\overline{\psi_1}$ estão fixas sobre $U \setminus V$.

Seja $\widetilde{\psi} : P \times [a,t] \to F(U')$ um levantamento de $\psi|_{P\times[a,t]}$. Como $r^F_{U',C} \circ \widetilde{\psi}|_{P\times[a,s]} = r^F_{U,C} \circ \widetilde{\psi_0}$ e $r^F_{U',C} \circ \widetilde{\psi}|_{P\times[s,t]} = r^F_{U,C} \circ \widetilde{\psi_1}$ temos que (proposição 1.1.11 e observação 1.1.21) existe uma vizinhança U'' de C contida em U e em U' tal que $r^F_{U',U''} \circ \widetilde{\psi}|_{P\times[a,s]} = r^F_{U,U''} \circ \widetilde{\psi_0}$ e $r^F_{U',U''} \circ \widetilde{\psi}|_{P\times[s,t]} = r^F_{U,U''} \circ \widetilde{\psi_1}$. Por simplificação e sem perda de generalidade supomos então que $U = U' = U''$ (basta substituir $\widetilde{\psi}$ por $r^F_{U',U''} \circ \widetilde{\psi}$ e analogamente para $\widetilde{\psi_0}$ e $\widetilde{\psi_1}$). Assim $\widetilde{\psi} : P \times [a,t] \to F(U)$ é tal que $\widetilde{\psi}|_{P\times[a,s]} = \widetilde{\psi_0}$ e $\widetilde{\psi}|_{P\times[s,t]} = \widetilde{\psi_1}$.

Seja agora V uma vizinhança de C em X. Tomemos uma deformação $\overline{\psi_0} : P \times [a,s] \to F(U)$ com as propriedades enumeradas acima que esteja fixa em $U \setminus V$ (propriedade (iii)). Como $r^F_{U,C} \circ \overline{\psi_0}|_{P\times\{s\}} = \psi_0|_{P\times\{s\}} = r^F_{U,C} \circ \widetilde{\psi_1}|_{P\times\{s\}}$ temos que (ver proposição 1.1.11 e observação 1.1.21)

$$r^F_{U,W} \circ \overline{\psi_0}|_{P\times\{s\}} = r^F_{U,W} \circ \widetilde{\psi_1}|_{P\times\{s\}} \tag{12}$$

para alguma vizinhança W de C contida em V. Seja então $\overline{\psi_1}$ uma deformação com as propriedades (i)-(ii) enumeradas acima que esteja fixa em $U \setminus W'$ (propriedade (iii)) onde W' é uma vizinhança de C em X tal que $\overline{W'} \subset W$. Seja agora $\overline{\psi_1}' : P \times [s,t] \to F(U)$ uma deformação tal que $r^F_{U,\overline{W'}} \circ \overline{\psi_1}' = r^F_{U,\overline{W'}} \circ \overline{\psi_1}$ e $r^F_{U,U\setminus W'} \circ \overline{\psi_1}' = r^F_{U,U\setminus W'} \circ \overline{\psi_0} \circ (\mathrm{id}_P \times p)$ (onde

$$\begin{aligned} p : [s,t] &\longrightarrow [a,s] \\ x &\longmapsto s \end{aligned}$$

) — tal deformação existe pois

$$\begin{tikzcd} F(U) \arrow[r] \arrow[d] & F(\overline{W'}) \arrow[d] \\ F(U \setminus W') \arrow[r] & F(\overline{W'} \setminus W') \end{tikzcd}$$

é um diagrama de pullback e porque $\overline{\psi_1}$ está fixa em $U \setminus W'$ e pela equação (12). Sabemos agora que $\overline{\psi_0}|_{P\times\{s\}} = \overline{\psi_1}'|_{P\times\{s\}}$ (pois $r^F_{U,\overline{W'}} \circ \overline{\psi_0}|_{P\times\{s\}} = r^F_{U,\overline{W'}} \circ \overline{\psi_1}'|_{P\times\{s\}}$ pela equação (12) e pela propriedade (ii) e porque $r^F_{U,U\setminus W'} \circ \overline{\psi_0}|_{P\times\{s\}} = r^F_{U,U\setminus W'} \circ \overline{\psi_1}'|_{P\times\{s\}}$ — a conclusão segue portanto de o diagrama anterior ser de pullback). Sendo assim, pela proposição 1.1.20 temos que $\overline{\psi_0}$ e $\overline{\psi_1}'$ colam para dar uma deformação $\overline{\psi} : P \times [a,t] \to F(U)$ (isto é, $\overline{\psi}|_{P\times[a,s]} = \overline{\psi_0}$ e $\overline{\psi}|_{P\times[s,t]} = \overline{\psi_1}'$) que verifica:

(i) $r^F_{U,C} \circ \overline{\psi} = \psi|_{P\times[a,t]}$;

(ii) $\overline{\psi}|_{P\times\{a\}} = \widetilde{\psi}|_{P\times\{a\}}$;

(iii) $\overline{\psi}$ está fixa sobre $U \setminus V$.

(as propriedades anteriores seguem das propriedades análogas de $\overline{\psi_0}$ e $\overline{\psi_1}'$ e da unicidade da colagem de dois morfismos). Conclui-se então que $\psi|_{P\times[a,t]}$ é compressível, o que termina a demonstração da afirmação acima e portanto a demonstração da proposição. ∎

Passamos agora à parte com conteúdo geométrico da demonstração do teorema da flexibilidade. Antes de mais precisamos de definir o conceito de difeotopia (que generaliza o conceito de isotopia).

1.2.28. Definição
Seja B uma variedade e sejam U, U' abertos de B com $U \subset U'$. Uma difeotopia *de U em U' é uma aplicação contínua $\delta : [0,1] \to C^\infty(U, U')$ (em $C^\infty(U, U')$ considera-se a topologia fraca-C^∞) tal que $\delta(0) = \mathrm{id}_U$ e $\delta(t)$ é um difeomorfismo entre abertos de B para cada $t \in [0,1]$.*

A aplicação das difeotopias nesta demonstração consiste do seguinte: sejam B uma variedade, S um pseudo-grupo de difeomorfismos de B e F um feixe quasi-topológico S-invariante sobre B. Então uma difeotopia δ de U em U' (onde U, U' são abertos de B com $U \subset U'$) com valores em S (isto é δ tem imagem contida em S) "actua nas secções de F" na medida em que induz uma aplicação $\delta^* : [0,1] \times F(U') \to F(U)$ definida da seguinte forma:

$$\delta^* \,:\, [0,1] \times F(U') \xrightarrow{\delta\times\mathrm{id}_{F(U')}} (S \cap C^\infty(U, U')) \times F(U') \xrightarrow{\Phi_{U,U'}} F(U)$$

(onde $\Phi_{U,U'}$ é como na definição de feixe S-invariante — ver definição 1.2.15 e comentários a seguir).

1.2.29. Observação
Um caso particular desta "acção" (para os feixes de secções e de soluções de uma relação diferencial numa variedade) já havia sido usado nas demonstrações da proposição 1.1.37 e do lema 1.1.51.

1.2.30. Definição
Sejam B uma variedade, U um aberto de B e A um subconjunto fechado de U. Define-se (estendendo a definição anterior de difeotopia) uma difeotopia de A em U *como sendo uma difeotopia de U' em U para alguma vizinhança U' de A contida em U. Dado um subconjunto C de A e uma vizinhança V de A, diz-se que um conjunto, $\mathcal{D}$, de difeotopias de A em U* move incisivamente C relativamente a V[10] *se:*

(i) para qualquer $\delta \in \mathcal{D}$, $\delta(1)(C) \cap V = \emptyset$.

(ii) para qualquer fechado F de A tal que $F \cap C = \emptyset$ existem $\delta \in \mathcal{D}$ e uma vizinhança W de F tal que para $t \in [0,1]$ se tem $\delta(t)|_W = \delta(0)|_W = \mathrm{id}_W$.

A proposição principal é a seguinte.

[10] Definição adaptada de Gromov [3]. Nessa referência não existe nenhuma definição equivalente à nossa. No entanto, nos casos de interesse que aparecem a seguir, a presente definição tem as mesmas consequências que a definição de *sharply movable* em Gromov [3]. Nesta parte da exposição, a abordagem em Gromov [3] é mais geral que a apresentada aqui.

1.2.31. Proposição
Seja B uma variedade e F um feixe quasi-topológico sobre B com valores em $c\mathcal{T}op$ que é S-invariante (onde S é um pseudo-grupo de difeomorfismos de B) e micro-flexível. Sejam G um subespaço fechado de B (com $i : G \to B$ a aplicação de inclusão), C um subespaço compacto de G e U uma vizinhança de C em B com fecho compacto. Suponhamos que existe uma vizinhança V de $G' := G \cap U$ em U tal que para qualquer vizinhança W de C em G' existe uma vizinhança A de C em G tal que $\overline{A} \subset W$ e existe um conjunto $\mathcal{D}$ de difeotopias de G' em U com valores em S que move incisivamente $\mathrm{fr}^G A = \overline{A} \backslash A$ relativamente a V. Então, dada uma deformação $\psi : P \times [0,1] \to F(\overline{U})$, a deformação $r^{F,i^*F}_{\overline{U},C} \circ \psi : P \times [0,1] \to (i^*F)(C)$ de i^*F sobre C é micro--compressível.

Demonstração. Note-se primeiro que como

$$r^F_{\overline{U},C\cup(\overline{U}\setminus V)} : F(\overline{U}) \longrightarrow F(C \cup (\overline{U} \setminus V))$$

é uma micro-fibração (pois F é micro-flexível), existe $\varepsilon \in]0,1]$ e uma deformação $\psi' : P \times [0,\varepsilon] \to F(\overline{U})$ que verifica:

$$\begin{aligned} r^F_{\overline{U},C} \circ \psi' &= r^F_{\overline{U},C} \circ \psi|_{P\times[0,\varepsilon]} \\ r^F_{\overline{U},\overline{U}\setminus V} \circ \psi' &= r^F_{\overline{U},\overline{U}\setminus V} \circ \psi|_{P\times[0,\varepsilon]} \circ (\mathrm{id}_P \times pr_{[0,\varepsilon]}) \\ \psi'|_{P\times\{0\}} &= \psi|_{P\times\{0\}} \end{aligned}$$

(omite-se aqui o argumento — que usa a proposição 1.2.20 — para construir a deformação $P\times[0,1] \to F(C\cup(\overline{U}\setminus V))$ necessária para obter ψ' por levantamento usando a propriedade de micro-fibração — este tipo de argumento foi usado repetidamente nas demonstrações anteriores e em casos simples não voltará a ser repetido).

Seja agora W uma vizinhança qualquer de C em G' e seja dado A como no enunciado da proposição. Seja W' um aberto de U tal que $W' \cap G = W$. Analogamente ao parágrafo anterior, sabemos que existe $\varepsilon' \in]0,\varepsilon]$ e uma deformação $\psi'' : P \times [0,\varepsilon'] \to F(\overline{U})$ que verifica:

$$\begin{aligned} r^F_{\overline{U},C} \circ \psi'' &= r^F_{\overline{U},C} \circ \psi|_{P\times[0,\varepsilon']} \\ r^F_{\overline{U},(\overline{U}\setminus W')\cup(\overline{U}\setminus V)} \circ \psi'' &= r^F_{\overline{U},(\overline{U}\setminus W')\cup(\overline{U}\setminus V)} \circ \psi|_{P\times[0,\varepsilon']} \circ (\mathrm{id}_P \times pr_{[0,\varepsilon']}) \\ \psi''|_{P\times\{0\}} &= \psi|_{P\times\{0\}} \end{aligned}$$

(isto é verifica propriedades análogas às de ψ' e além disso ainda está fixa sobre $\overline{U} \setminus W'$).

Queremos agora usar as duas deformações ψ' e ψ'' para construir uma deformação de $\varphi : P \times [0,\varepsilon] \to F(\overline{U})$ com as propriedades de ψ' enunciadas acima e que além disso seja tal que $\varphi|_{P\times[0,\varepsilon'']}$ (para algum $\varepsilon'' \in]0,\varepsilon']$) esteja fixa sobre $\overline{U} \setminus W'$ (como acontece com ψ''). A ideia é "interpolar" entre ψ' e ψ'' usando o facto de $r^F_{\overline{U},C\cup(\overline{U}\setminus V)} : F(\overline{U}) \to F(C \cup (\overline{U} \setminus V))$ ser uma micro-fibração. Usando a propriedade de colagem enunciada na proposição 1.1.20, construímos um morfismo

$$h : Q \to F(\overline{U})$$

onde

$$Q := P \times [0,\varepsilon] \times \{0\} \cup P \times \{0\} \times [0,1] \cup P \times [0,\varepsilon'] \times \{1\}$$

exigindo que

$$\begin{aligned} h|_{P\times[0,\varepsilon]\times\{0\}} &= \psi' \\ h|_{P\times[0,\varepsilon']\times\{1\}} &= \psi'' \\ h|_{P\times\{0\}\times[0,1]} &= \psi \circ (\mathrm{id}_P \times pr_{[0,1]}) \end{aligned}$$

(identificam-se $P \times [0,\varepsilon] \times \{0\}$ com $P \times [0,\varepsilon]$, $P \times [0,\varepsilon'] \times \{1\}$ com $P \times [0,\varepsilon']$ e $P \times \{0\} \times [0,1]$ com $P \times [0,1]$). Consideremos então o problema de levantamento correspondente ao seguinte diagrama comutativo:

$$\begin{tikzcd} Q \arrow[r, "h"] \arrow[d, hook] & F(\overline{U}) \arrow[d] \\ P \times [0,\varepsilon] \times [0,1] \arrow[r, "H"] & F(C \cup (\overline{U} \setminus V)) \end{tikzcd}$$

onde H é determinado por

$$\begin{aligned} r^F_{\overline{U},C} \circ H &= r^F_{\overline{U},C} \circ \psi|_{P\times[0,\varepsilon]} \circ p \\ r^F_{\overline{U},\overline{U}\setminus V} \circ H &= r^F_{\overline{U},\overline{U}\setminus V} \circ \psi|_{P\times[0,\varepsilon]} \circ (\mathrm{id}_P \times pr_{[0,\varepsilon]}) \circ p \end{aligned}$$

(com $p : P\times[0,\varepsilon]\times[0,1] \to P\times[0,\varepsilon]$ a projecção nos dois primeiros factores). Como o par $(P\times[0,\varepsilon]\times[0,1], Q)$ é homeomorfo ao par $(P\times[0,1]\times[0,1], P\times[0,1]\times\{0\})$ (visto que os pares $([0,\varepsilon]\times[0,1], [0,\varepsilon]\times\{0\}\cup\{0\}\times[0,1]\cup[0,\varepsilon']\times\{1\})$ e $([0,1]\times[0,1], [0,1]\times\{0\})$ são homeomorfos) e visto que

$$r^F_{\overline{U},C\cup(\overline{U}\setminus V)} : F(\overline{U}) \to F(C \cup (\overline{U} \setminus V))$$

é uma micro-fibração, concluímos que no problema de levantamento formulado, a aplicação H admite um levantamento numa vizinhança de Q, isto é, existe uma vizinhança VQ de Q em $P \times [0,\varepsilon] \times [0,1]$ e um diagrama comutativo:

$$\begin{tikzcd} Q \arrow[r, "h"] \arrow[d, hook] & F(\overline{U}) \arrow[dd] \\ VQ \arrow[ur, "\widetilde{H}"'] \arrow[d, hook] & \\ P \times [0,\varepsilon] \times [0,1] \arrow[r, "H"] & F(C \cup (\overline{U} \setminus V)) \end{tikzcd}$$

Este levantamento $\widetilde{H}$ permite-nos "interpolar" entre $\psi' = \widetilde{H}|_{P\times[0,\varepsilon]\times\{0\}}$ e $\psi'' = \widetilde{H}|_{P\times[0,\varepsilon']\times\{1\}}$ da seguinte forma: seja $\varepsilon'' \in]0,\varepsilon']$ tal que $P \times [0,2\varepsilon''] \times [0,1] \subset VQ$. Seja $\rho : [0,\varepsilon] \to [0,1]$ uma função contínua tal que $\rho|_{[0,\varepsilon'']} = 1$ e $\rho|_{[2\varepsilon'',\varepsilon]} = 0$. A "interpolação" entre ψ e φ pretendida é então o morfismo:

$$\varphi := \widetilde{H} \circ (\mathrm{id}_P \times (\mathrm{id}_{[0,\varepsilon]}, \rho)) : P \times [0,\varepsilon] \to F(\overline{U})$$

Da construção de φ e das propriedades de ψ' e ψ'' é fácil verificar que φ verifica as propriedades pretendidas, isto é:

- $r^F_{\overline{U},C} \circ \varphi = r^F_{\overline{U},C} \circ \psi|_{P\times[0,\varepsilon]}$
- $\varphi|_{P\times\{0\}} = \psi|_{P\times\{0\}}$
- φ está fixa sobre $\overline{U} \setminus V$ e $\varphi|_{P\times[0,\varepsilon'']}$ está fixa sobre $\overline{U} \setminus W'$.

Seja $\varphi' = r^F_{\overline{U},U} \circ \varphi$. As propriedades de φ' são análogas às de φ (e deduzem-se imediatamente daquelas).

Por hipótese, existe um conjunto $\mathcal{D}$ de difeotopias de G' em U com valores em S que move incisivamente $\mathrm{fr}^G A = \overline{A} \setminus A$ relativamente a V. Escolha-se uma difeotopia δ em $\mathcal{D}$ tal que:

(i) $\delta(1)(\mathrm{fr}^G A) \subset U \setminus V$

(ii) existe uma vizinhança VW de $(G' \setminus W) \cup C$ tal que $\delta(t)|_{VW} = \mathrm{id}_{VW}$ para $t \in [0,1]$.

Suponhamos que $\delta : [0,1] \to C^\infty(U', U)$, onde U' é uma vizinhança de G' em U. Definimos agora uma nova difeotopia $\overline{\delta}$ de G' em U (com valores em S) por $\overline{\delta}(t) := \delta((\varepsilon'')^{-1}t)$ para $t \in [0,\varepsilon'']$ e $\overline{\delta}(t) := \delta(1)$ para $t \in [\varepsilon'', 1]$. Constrói-se então uma deformação $\overline{\psi} : P \times [0,\varepsilon] \to F(G')$ exigindo que ($\overline{\delta}^*$ é a "acção" de $\overline{\delta}$ nas secções de F como definida anteriormente):

$$r^F_{G',\overline{A}} \circ \overline{\psi} = r^F_{U',\overline{A}} \circ \overline{\delta}^* \circ (q, \varphi')$$
$$r^F_{G',G'\setminus A} \circ \overline{\psi} = r^F_{U',G'\setminus A} \circ \overline{\delta}^* \circ (q', \varphi')$$

(onde $q : P \times [0,\varepsilon] \to [0,\varepsilon] \subset [0,1]$ é a projecção no segundo factor e

$$\begin{aligned} q' : P \times [0,\varepsilon] &\longrightarrow [0,1] \\ (p,t) &\longmapsto \min\{t, \varepsilon''\} \end{aligned}$$

). Note-se que tal definição é possível pois

$$r^F_{U',\mathrm{fr}^G A} \circ \overline{\delta}^* \circ (q, \varphi') = r^F_{U',\mathrm{fr}^G A} \circ \overline{\delta}^* \circ (q', \varphi')$$

(é imediato que ambas as deformações na equação acima coincidem em $P \times [0,\varepsilon'']$. Para concluir que coincidem em $P \times [\varepsilon'', \varepsilon]$, observe-se que $\overline{\delta}$ é constante igual a $\delta(1)$ em $[\varepsilon'', \varepsilon]$ e portanto que nesse intervalo, $\overline{\delta}$ leva $\mathrm{fr}^G A$ para $U \setminus V$, em que φ' está fixa[11]. Assim se conclui que as deformações presentes na equação acima quando restritas a $P \times [\varepsilon'', \varepsilon]$ estão fixas em $\mathrm{fr}^G A$. Como as deformações coincidem em $P \times \{\varepsilon''\}$, tem-se então que coincidem em $P \times [\varepsilon'', \varepsilon]$. Como as deformações coincidem em $P \times [0, \varepsilon'']$ e em $P \times [\varepsilon'', \varepsilon]$, uma aplicação da proposição 1.1.20 permite-nos concluir que as deformações coincidem). Note-se que este $\overline{\psi}$ tem as seguintes propriedades (onde $\widetilde{\psi} := r^F_{\overline{U},G'} \circ \psi$):

- $r^F_{G',C} \circ \overline{\psi} = r^F_{\overline{U},C} \circ \psi$;
- $\overline{\psi}|_{P\times\{a\}} = \widetilde{\psi}|_{P\times\{a\}}$;
- $\overline{\psi}$ está fixa sobre $G' \setminus W$.

A primeira propriedade segue de $\overline{\delta}(t)$ coincidir com a identidade numa vizinhança de C para $t \in [0,1]$ (pela propriedade (ii) de δ) e a segunda propriedade segue de $\overline{\delta}(0) = \mathrm{id}_{U'}$. A terceira propriedade segue do facto

[11] e portanto, φ' também está fixa numa vizinhança de $U \setminus V$ — usar a proposição 1.1.11 e a observação 1.1.21.

(atente-se na segunda equação que define $\overline{\psi}$) de $\varphi'|_{P\times[0,\varepsilon'']}$ estar fixo sobre $U \setminus W'$ e $\overline{\delta}$ coincidir com a identidade numa vizinhança de $G' \setminus W$.

Provou-se então que existe $\varepsilon \in]0,1]$ tal que para qualquer vizinhança W de C em $G' := G \cap U$ existe uma deformação $\overline{\psi} : P \times [0,\varepsilon] \to F(G')$ com as propriedades enumeradas acima. Usando os isomorfismos canónicos entre $F(C)$ e $(i^*F)(C)$ e entre $F(G')$ e $(i^*F)(G')$, vê-se que esta conclusão implica imediatamente (por definição de micro-compressibilidade) a micro-compressibilidade da deformação $r^{F,i^*F}_{\overline{U},C} \circ \psi : P \times [0,1] \to (i^*F)(C)$ de i^*F sobre C. ■

Podemos agora finalmente provar o teorema da flexibilidade (que se volta a enunciar).

1.2.32. Teorema (Teorema da flexibilidade)
Seja M uma variedade e sejam $\pi : M \times \mathbb{R} \to M$ a projecção no primeiro factor e $i : M \times \{0\} \to M \times \mathbb{R}$ a inclusão. Se F é um feixe quasi-topológico com valores em $c\mathcal{T}op$ sobre $M \times \mathbb{R}$ que é micro-flexível e $\mathrm{Diff}(M \times \mathbb{R}, \pi)$*-invariante então i^*F é um feixe flexível sobre $M \times \{0\}$.*

Demonstração. Pela proposição 1.2.27, basta mostrar que dado um subespaço compacto C de $M \times \{0\}$, qualquer deformação de i^*F sobre C é micro-compressível. Seja então $\varphi : P \times [a,b] \to (i^*F)(C)$ uma deformação. Queremos provar que φ é micro-compressível. Usando o isomorfismo canónico entre $(i^*F)(C)$ e $F(C)$, substituímos φ por $\varphi' : P \times [a,b] \to F(C)$. Seja $\widetilde{\varphi} : P \times [a,b] \to F(U')$ um levantamento de φ' para alguma vizinhança U' de C em $B \times \mathbb{R}$. Seja agora U uma vizinhança de C em $B \times \mathbb{R}$ tal que $\overline{U}$ é compacto e está contido em U'. Defina-se $\psi := r^F_{U',\overline{U}} \circ \widetilde{\varphi}$. A conclusão pretendida (φ é micro-compressível) segue imediatamente da proposição anterior após se verificarem as condições da mesma (considerando — na notação do enunciado da proposição anterior — C, U e ψ como nesta demonstração e $B = M \times \mathbb{R}$, $G = B \times \{0\}$ e $S = \mathrm{Diff}(M \times \mathbb{R}, \pi)$). Para isso basta achar uma vizinhança V de $G' = (M \times \mathbb{R}) \cap U$ em U tal que para qualquer vizinhança W de C em G' existe uma vizinhança A de C em G tal que $\overline{A} \subset W$ e existe um conjunto $\mathcal{D}$ de difeotopias de G' em U com valores em S que move incisivamente $\mathrm{fr}^G A = \overline{A} \setminus A$ relativamente a V. Seja $V = C' \times]-\varepsilon/2, \varepsilon/2[$ (onde C' é tal que $C = C' \times \{0\}$ e $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ é tal que $VC' \times]-\varepsilon, \varepsilon[\subset U$ para alguma vizinhança VC' de C'). Então, dada uma vizinhança W de C em G', basta tomar para A qualquer vizinhança de C em G tal que $\overline{A} \subset W$. Para ver que algum subconjunto do conjunto das difeotopias de G' em U com valores em S move incisivamente $\mathrm{fr}^G A = \overline{A} \setminus A$ relativamente a V, basta provar as propriedades (i) e (ii) da definição de "mover incisivamente". Seja para isso dado (propriedade (ii)) um fechado T de G' tal que $T \cap \mathrm{fr}^G A = \emptyset$. Seja então $\rho : B \to [0, 2\varepsilon/3]$ uma função de classe C^∞ tal que $\rho|_{\mathrm{fr}^G A} = 2\varepsilon/3$ e $\rho|_{VT} = 0$ para alguma vizinhança VT de $T \cup (U \setminus VC')$ (identifica-se B com $B \times \{0\}$). Então as aplicações

$$\begin{aligned} \delta(t) : B \times \mathbb{R} &\longrightarrow B \times \mathbb{R} \\ (x,t) &\longmapsto (x, t + \rho(x)) \end{aligned}$$

para $t \in [0,1]$ restritas a uma vizinhança adequada de G' definem uma isotopia δ de G' em U tal que:

(i) $\delta(1)(C) \cap V = \emptyset$.
(ii) existe uma vizinhança VT de T tal que $\delta(t)|_{VT} = \delta(0)|_{W} = \mathrm{id}_{VT}$ para $t \in [0,1]$.

(correspondem às propriedades (i) e (ii) da definição de "mover incisivamente"). Sendo assim, conclui-se que algum subconjunto do conjunto das difeotopias de G' em U com valores em S move incisivamente $\mathrm{fr}^G A = \overline{A} \setminus A$ relativamente a V (nomeadamente, o conjunto das difeotopias δ construídas acima para cada fechado T), pelo que a proposição anterior se aplica, como restava provar. ■

1.3. **O teorema da micro-extensão.**

O objectivo desta secção é dar um resumo de alguns resultados que permitem estabelecer o princípio-h para variedades fechadas. Em vista do teorema do homomorfismo de feixes, uma forma de conseguir isto é obter um critério para que um feixe seja flexível.

1.3.1. Definição
Seja $\alpha : F \to G$ um morfismo entre feixes quasi-topológicos sobre um espaço topológico B. α é sobrejectivo *se para cada $b \in B$ se tem que o morfismo induzido $\alpha_{\{b\}} : F(\{b\}) \to G(\{b\})$ é sobrejectivo (diz-se que um morfismo $f : X \to Z$ entre espaços quasi-topológicos é sobrejectivo se induzir uma sobrejecção dos pontos de X para os pontos de Z, isto é, se a aplicação $f(*) : X(*) \to Z(*)$ é sobrejectiva).*

1.3.2. Definição
Seja $\alpha : F \to G$ um morfismo entre feixes quasi-topológicos sobre um espaço topológico B. α diz-se uma micro-extensão *se for sobrejectivo e se para qualquer par de subespaços compactos de (C, C') de B se tem que a aplicação natural $F(C) \to F(C') \times_{G(C')} G(C)$ é uma micro-fibração ($F(C') \times_{G(C')} G(C)$ designa o pullback da porção com setas a cheio do diagrama a seguir:*

$$\begin{tikzcd} F(C') \times_{G(C')} G(C) \arrow[r, dashed] \arrow[d, dashed] & G(C) \arrow[d] \\ F(C') \arrow[r, "\alpha_{C'}"] & G(C') \end{tikzcd}$$

onde o morfismo vertical da direita é o morfismo induzido por restrição).

É agora possível enunciar o teorema da micro-extensão. Para obter uma demonstração, o leitor é convidado a analisar a secção 2.2.5 de Gromov [3].

1.3.3. Teorema (Teorema da micro-extensão)
Seja $\alpha : F \to G$ um morfismo entre feixes quasi-topológicos com valores em $c\mathcal{T}op$ sobre uma variedade B. Se α é uma micro-extensão e F é flexível então G também é flexível.

Pretende-se agora aplicar o teorema anterior a demonstrações de validade do princípio-h. Para isso introduz-se o conceito de extensão invariante.

1.3.4. Definição
Sejam $p : E \to B$ um fibrado suave e $\mathcal{R}$ uma relação diferencial de ordem $r \in \mathbb{N}$ em E. Considere-se o fibrado $p' := p \times \mathrm{id}_{\mathbb{R}} : E' := E \times \mathbb{R} \to B \times \mathbb{R}$ e sejam $\pi : B \times \mathbb{R} \to B$ e $\widetilde{\pi} : E \times \mathbb{R} \to E$ as projecções no primeiro factor. Define-se então a aplicação

$$\begin{aligned} \pi^{(r)} : (E')^{(r)} &\longrightarrow E^{(r)} \\ j^r_{(x,t)}(s) &\longmapsto j^r_x(\widetilde{\pi} \circ s \circ i_t) \end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned} i_t : B &\longrightarrow B \times \mathbb{R} \\ x &\longmapsto (x, t) \end{aligned}$$

Uma relação diferencial $\widetilde{\mathcal{R}}$ de ordem $r \in \mathbb{N}$ em $\pi^* E$ diz-se uma extensão *de $\mathcal{R}$ se $\pi^{(r)}(\widetilde{\mathcal{R}}) = \mathcal{R}$.*

Observe-se agora que existe uma extensão contínua natural $\Phi : \mathrm{Diff}(B \times \mathbb{R}, \pi) \to \mathrm{Diff}(E')$ (onde se considera a generalização óbvia do conceito de extensão contínua — definição 1.1.32 — ao caso de pseudo-grupos de difeomorfismos) para o fibrado $p' : E' \to B \times \mathbb{R}$ que a cada $f \in \mathrm{Diff}(B \times \mathbb{R}, \pi)$ com domínio num aberto U de $B \times \mathbb{R}$ associa

$$\begin{aligned} \Phi(f) : \quad (p')^{-1}(U) &\longrightarrow (p')^{-1}(f(U)) \\ E \times \mathbb{R} \ni (x, t) &\longmapsto (x, \pi_{\mathbb{R}} \circ f \circ p'(x, t)) \end{aligned}$$

onde $\pi_{\mathbb{R}} : B \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é a projecção no segundo factor. Uma extensão $\widetilde{\mathcal{R}}$ de $\mathcal{R}$ diz-se invariante *se $\widetilde{\mathcal{R}}$ é invariante por Φ^r (definida da mesma forma que no exemplo 1.1.34), isto é, para qualquer $f \in \mathrm{Diff}(B \times \mathbb{R}, \pi)$, $(\Phi^r(f))(\mathcal{R}) \subset \mathcal{R}$.*

1.3.5. Observação
Note-se que nas condições da definição anterior, se $\widetilde{\mathcal{R}}$ for uma extensão invariante de $\mathcal{R}$ então $\mathrm{Sol}_{\widetilde{\mathcal{R}}}$ é $\mathrm{Diff}(B \times \mathbb{R}, \pi)$-invariante (o que se conclui de forma análoga ao feito no exemplo 1.2.16).

O teorema seguinte permitir-nos-à provar a validade do princípio-h em certos casos.

1.3.6. Teorema
Seja $p : E \to B$ um fibrado suave e $\mathcal{R}$ uma relação diferencial aberta em E. Se $\mathcal{R}$ admite uma extensão invariante $\widetilde{\mathcal{R}}$ que é aberta (isto é, $\widetilde{\mathcal{R}}$ é uma relação diferencial aberta em E') então as soluções de $\mathcal{R}$ são flexíveis e $\mathcal{R}$ satisfaz o princípio-h paramétrico sobre qualquer aberto de B.

Demonstração. O feixe topológico $\mathrm{Sol}_{\widetilde{\mathcal{R}}}$ das soluções de $\widetilde{\mathcal{R}}$ é micro-flexível (pela proposição 1.1.46 pois $\widetilde{\mathcal{R}}$ é aberta). Sendo assim, pelo teorema da flexibilidade (observe-se que $\mathrm{Sol}_{\widetilde{\mathcal{R}}}$ é $\mathrm{Diff}(B \times \mathbb{R}, \pi)$-invariante) temos que $i^* \mathrm{Sol}_{\widetilde{\mathcal{R}}}$ é flexível (onde

$$\begin{aligned} i : B &\longrightarrow B \times \mathbb{R} \\ x &\longmapsto (x, 0) \end{aligned}$$

). Da definição de extensão segue facilmente que se tem um morfismo natural $\alpha : i^* \mathrm{Sol}_{\widetilde{\mathcal{R}}} \to \mathrm{Sol}_{\mathcal{R}}$. Este morfismo é uma micro-extensão (isto segue do facto de $\mathcal{R}$ e $\widetilde{\mathcal{R}}$ serem abertas por um argumento semelhante ao usado na demonstração da proposição 1.1.46). Sendo assim, pelo teorema da micro-

-extensão tem-se que $\mathrm{Sol}_{\mathcal{R}}$ é flexível e em particular (pelo corolário 1.2.14 do teorema do homomorfismo de feixes) $\mathcal{R}$ verifica o princípio-h paramétrico sobre qualquer aberto de B. ■

1.3.7. Observação
Observe-se que se uma relação diferencial num fibrado suave possui uma extensão aberta então a relação diferencial é aberta.

1.3.8. Exemplo
Sejam M, N variedades e $p : E := N \times M \to M$ o fibrado trivial. A relação de imersão (correspondente às imersões $M \to N$), $\mathcal{I}$, em E admite uma extensão invariante no caso de $\dim M < \dim N$: neste caso basta tomar em $p' : E' = N \times M \times \mathbb{R} \to M \times \mathbb{R}$ (que é a projecção nos dois últimos factores) a relação de imersão $\widetilde{\mathcal{I}}$ (correspondente a imersões $M \times \mathbb{R} \to N$) que como se sabe é aberta. Fica ao cuidado do leitor a verificação elementar de que é uma extensão invariante de $\mathcal{I}$ (observe-se que $\widetilde{\mathcal{I}}$ é não-vazia apenas se $\dim M < \dim N$ — e neste caso, $\widetilde{\mathcal{I}}$ é mesmo uma extensão de $\mathcal{I}$ — e que a $\mathrm{Diff}(B \times \mathbb{R})$-invariância que já se observou para $\widetilde{\mathcal{I}}$ — exemplo 1.1.36 — permite mostrar a invariância da extensão).

Em vista do exemplo anterior, temos o seguinte teorema (teorema de Smale-Hirsch para o caso extra-dimensional).

1.3.9. Teorema
Sejam M, N variedades com $\dim M < \dim N$. Então as imersões $M \to N$ verificam o princípio-h paramétrico (isto é, a relação de imersão no fibrado trivial $M \times N \to M$ satisfaz o princípio-h paramétrico). De forma equivalente (ver diagrama (2)), a aplicação $d : \mathrm{Imm}(M, N) \longrightarrow \mathrm{Mon}(TM, TN)$ é uma equivalência de homotopia fraca.

1.3.10. Exemplo
Mais geralmente que no exemplo anterior, existe um método de obter uma extensão invariante aberta, caso ela exista. Sejam $p : E \to B$ um fibrado suave com uma relação diferencial $\mathcal{R}$ de ordem $r \in \mathbb{N}$ e considerem-se o fibrado $p' : E' \to B \times \mathbb{R}$, as aplicações $\pi : B \times \mathbb{R} \to B$ e $\pi^r : (E')^{(r)} \to E^r$ e a extensão contínua $\Phi : \mathrm{Diff}(B \times \mathbb{R}, \pi) \to \mathrm{Diff}(E')$ para E' como na definição 1.3.4. Constrói-se então uma relação $\widehat{\mathcal{R}}$ de ordem $r \in \mathbb{N}$ em E' da seguinte forma: considera-se para $\mathcal{R}'$ o subconjunto maximal de $(\pi^r)^{-1}(\mathcal{R})$ invariante por Φ^r (nomeadamente

$$\mathcal{R}' = \bigcap_{\substack{f : B\times\mathbb{R} \to B\times\mathbb{R} \\ f \in \mathrm{Diff}(B\times\mathbb{R}, \pi)}} (\Phi^r(f))((\pi^r)^{-1}(\mathcal{R}))$$

). $\mathcal{R}'$ é uma extensão invariante (maximal) de $\mathcal{R}$ mas não é necessariamente aberta. Define-se então $\widehat{\mathcal{R}} := \operatorname{int} \mathcal{R}'$. Da construção de $\widehat{\mathcal{R}}$ é fácil concluir que se $\mathcal{R}$ possuir uma extensão invariante aberta então $\widehat{\mathcal{R}}$ é uma extensão invariante aberta (maximal) de $\mathcal{R}$. Em particular, $\mathcal{R}$ admite uma extensão invariante aberta sse $\widehat{\mathcal{R}}$ for uma extensão de $\mathcal{R}$, isto é, $\pi^r(\widehat{\mathcal{R}}) = \mathcal{R}$.

Para terminar esta secção, pretende-se aplicar este exemplo para obter o princípio-h num caso bastante interessante. Seja $p : E \to B$ um fibrado suave e seja τ uma distribuição em E (isto é, um sub-fibrado vectorial suave de $TE \to E$). Consideremos a relação diferencial, $\mathcal{TR}_\tau$ de ordem 1 em E correspondente às secções locais $B \to E$ transversais a τ (ou seja, $\mathcal{TR}_\tau \subset E^{(1)}$ é constituído pelos jactos-1 de secções locais, s, de $p : E \to B$ cujo diferencial é transversal a τ — isto é, para qualquer x no domínio de s, $\operatorname{im}(d_x s) + \tau_{s(x)}$ é um subespaço de $T_x E$ com dimensão igual a $\min\{\dim E, \dim B + \dim \tau\}$ — a dimensão máxima possível). Facilmente se conclui que esta relação diferencial é aberta. Além disso, temos a seguinte proposição.

1.3.11. Proposição
Seja $p : E \to B$ um fibrado suave e τ uma distribuição em E tais que $\operatorname{codim}\tau > \dim B$. *Então $\mathcal{TR}_\tau$ satisfaz o princípio-h paramétrico.*

Demonstração. Basta observar que neste caso a relação $\widehat{\mathcal{TR}_\tau}$ como definida no exemplo acima verifica $\pi^r(\widehat{\mathcal{TR}_\tau}) = \mathcal{TR}_\tau$ (esta verificação elementar é deixada ao cuidado do leitor) e portanto $\mathcal{TR}_\tau$ admite uma extensão invariante aberta. Assim, pelo teorema 1.3.6 conclui-se que $\mathcal{TR}_\tau$ satisfaz o princípio-h paramétrico. ∎

Sejam agora dadas variedades M, N e uma distribuição τ em N com $\operatorname{codim}\tau > \dim M$. Considere-se o fibrado trivial $p : E := M \times N \to M$ e a distribuição induzida, τ', em $M \times N$ da distribuição τ pela projecção $M \times N \to N$ no segundo factor. Então pela proposição acima, tem-se que $\mathcal{TR}_{\tau'}$ satisfaz o princípio-h paramétrico. Por outro lado, de forma semelhante ao que se fez para obter o diagrama (2), obtém-se também um diagrama comutativo como o seguinte:

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Sol}^1(\mathcal{TR}_{\tau'}) \arrow[r, "j^1"] & \Gamma^0(\mathcal{TR}_{\tau'}) \\
C^1_{\mathrm{Tr}}(M,N;\tau) \arrow[u, "\wr"] \arrow[r, "d"] & \mathrm{Tr}(TM,TN;\tau) \arrow[u, "\wr"]
\end{tikzcd}$$

onde $C^1_{\mathrm{Tr}}(M,N;\tau)$ designa o subespaço de $C^1(M,N)$ (com a topologia fraca-C^1) constituído pelas funções $f : M \to N$ transversais a τ (isto é, tais que df é transversal a τ), $\mathrm{Tr}(TM,TN;\tau)$ o espaço dos morfismos de fibrados vectoriais $TM \to TN$ que são transversais a τ (com a topologia compacta-aberta) e a aplicação d corresponde a tomar o diferencial. Como a aplicação de cima no diagrama é uma equivalência de homotopia fraca, conclui-se que d também é uma equivalência de homotopia fraca. Sendo assim, provou-se o teorema seguinte.

1.3.12. Teorema
Sejam M, N variedades e τ uma distribuição em N com $\operatorname{codim}\tau > \dim M$. *Então a aplicação $d : C^1_{\mathrm{Tr}}(M,N;\tau) \longrightarrow \mathrm{Tr}(TM,TN;\tau)$ é uma equivalência de homotopia fraca.*

Observe-se que este teorema tem como caso particular o teorema 1.3.9 (basta tomar para τ a única distribuição de dimensão zero em N). Este teorema corresponde ao caso extra-dimensional do teorema de transversalidade de Gromov-Phillips que se provará na secção seguinte.

1.4. **Duas aplicações do princípio-h.**
Nesta secção analisam-se mais duas aplicações usuais do princípio-h para variedades abertas (para mais aplicações simples do teorema 1.1.57 consulte--se Haefliger [7] ou Geiges [2]). Comecemos pelo teorema de transversalidade de Gromov-Phillips (cujo caso extra-dimensional foi obtido no final da secção anterior).

1.4.1. Proposição
Sejam M, N variedades com M aberta e τ uma distribuição em N. Considere-se o fibrado trivial $p : E := M \times N \to M$ e a distribuição induzida, τ', em $M \times N$ da distribuição τ pela projecção $M \times N \to N$ no segundo factor. Então a relação $\mathcal{TR}_{\tau'}$ em E satisfaz o princípio-h paramétrico.

Demonstração. Esta proposição segue imediatamente da proposição 1.1.57 pois a relação $\mathcal{TR}_{\tau'}$ é aberta e $\mathrm{Diff}(M)$-invariante. ■

Observe-se que, nas condições da proposição acima, tem-se um diagrama comutativo (ver discussão no final da secção anterior)

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Sol}^1(\mathcal{TR}_{\tau'}) & \xrightarrow{j^1} & \Gamma^0(\mathcal{TR}_{\tau'}) \\ \wr\!\uparrow & & \wr\!\uparrow \\ C^1_{\mathrm{Tr}}(M,N;\tau) & \xrightarrow{d} & \mathrm{Tr}(TM,TN;\tau) \end{array}$$

e portanto, $d : C^1_{\mathrm{Tr}}(M,N;\tau) \to \mathrm{Tr}(TM,TN;\tau)$ é uma equivalência de homotopia fraca. Para enunciar o teorema de transversalidade de Gromov--Phillips da forma usual, reformulamos ligeiramente esta afirmação. Seja $\nu(\tau)$ o fibrado normal a τ ($\nu(\tau) := TN/\tau$) e $\pi : TN \to \nu(\tau)$ a projecção. Então a aplicação

$$\begin{array}{rccc} \pi_* : & \mathrm{Tr}(TM,TN;\tau) & \longrightarrow & \mathrm{Tr}(TM,\nu(\tau);0) \\ & F & \longmapsto & \pi \circ F \end{array}$$

(onde 0 representa o sub-fibrado vectorial trivial — de dimensão zero — de $\nu(\tau)$) é uma equivalência de homotopia: tomando um isomorfismo

$$\alpha : \tau \oplus \nu(\tau) \to TE$$

tem-se uma aplicação (em que i é a composta $\nu(\tau) \hookrightarrow \tau \oplus \nu(\tau) \xrightarrow{\alpha} TE$):

$$\begin{array}{rccc} i_* : & \mathrm{Tr}(TM,\nu(\tau);0) & \longrightarrow & \mathrm{Tr}(TM,TN;\tau) \\ & F & \longmapsto & i \circ f \end{array}$$

tal que $\pi_* \circ i_* = \mathrm{id}_{\mathrm{Tr}(TM,\nu(\tau);0)}$ e $i_* \circ \pi_*$ é homotópica a $\mathrm{id}_{\mathrm{Tr}(TM,TN;\tau)}$ (como se verifica facilmente). Sendo assim tem-se que a aplicação $\pi_* \circ d : C^1_{\mathrm{Tr}}(M,N;\tau) \to \mathrm{Tr}(TM,\nu(\tau);0)$ é uma equivalência de homotopia fraca. Provou-se então o seguinte teorema.

1.4.2. Teorema (Gromov-Phillips)
Sejam M, N variedades com M aberta e τ uma distribuição em N. A aplicação

$$\begin{array}{ccc} C^1_{\mathrm{Tr}}(M,N;\tau) & \longrightarrow & \mathrm{Tr}(TM,\nu(\tau);0) \\ f & \longmapsto & \pi \circ df \end{array}$$

(onde $\pi : TN \to \nu(\tau)$ é a projecção sobre o fibrado normal a τ) é uma equivalência de homotopia fraca.

Observe-se que este teorema tem como casos particulares os teoremas 1.1.59 e 1.1.60 (tomando para τ a única distribuição de N de dimensão zero; no caso em que $\dim M \leq \dim N$ resulta o teorema 1.1.59 e no caso em que $\dim M \geq \dim N$ resulta o teorema 1.1.60).

A aplicação seguinte que damos do princípio-h refere-se à existência de estruturas simplécticas em variedades abertas. Para isso é necessário o seguinte lema cuja demonstração é simples e deixada ao cuidado do leitor (alternativamente, pode consultar a demonstração em Geiges [2], lema 2.4).

1.4.3. Lema
Seja B uma variedade e considere-se o fibrado cotangente de B, $p : E := T^*B \to B$. Então existe um diagrama comutativo natural

$$\begin{tikzcd} E^{(1)} \arrow[r, "D"] \arrow[d, "p^1"'] & \Lambda^2 T^*B \arrow[d] \\ B \arrow[r, "\mathrm{id}_B"] & B \end{tikzcd}$$

em que D é definido por:

$$\begin{aligned} D\colon E^{(1)} &\longrightarrow \Lambda^2 T^*B \\ j^1_x(\alpha) &\longmapsto (d\alpha)_x \end{aligned}$$

Além disso, $D : E^{(1)} \to \Lambda^2 T^*B$ é um morfismo sobrejectivo de fibrados vectoriais e também é um fibrado afim.

Consideremos então o fibrado cotangente $p : E := T^*B$ sobre uma variedade B de dimensão $2n$ ($n \in \mathbb{N}$). O lema anterior permite-nos definir a seguinte relação diferencial de ordem 1 em E (D é como no lema acima):

$$\mathcal{R} := \{j \in E^{(1)} : (D(j))^n \neq 0\}$$

Esta relação é aberta pois $\{\alpha \in \Lambda^2 T^*B : \alpha \neq 0\}$ é aberto em $\Lambda^2 T^*B$. É também fácil ver da definição de D que $\mathcal{R}$ é $\mathrm{Diff}(B)$-invariante. Basta considerar a seguinte extensão contínua natural para E: $\Phi : \mathrm{Diff}\, B \to \mathrm{Diff}(E)$ que a um difeomorfismo $f \in \mathrm{Diff}(B)$ de U para V (com U, V abertos de B) associa

$$\begin{aligned} \Phi(f)\colon\ p^{-1}(U) &\longrightarrow p^{-1}(V) \\ T^*_x B \ni \alpha &\longmapsto f_*\alpha = (d_x f)_*\alpha \end{aligned}$$

Por outro lado, como D é um fibrado afim sobrejectivo (e portanto a fibra é homeomorfa a $\mathbb{R}^k$ para alguma $k \in \mathbb{N}$ e em particular é contráctil), conclui-se que D restringe a uma equivalência de homotopia fibrada (sobre B) entre $\mathcal{R}$ e $\{\alpha \in \Lambda^2 T^*B : \alpha \neq 0\}$. Em particular, tem-se que D induz uma equivalência de homotopia entre $\Gamma^0(\mathcal{R}|B)$ e o espaço das secções contínuas de $\{\alpha \in \Lambda^2 T^*B : \alpha \neq 0\} \to B$, isto é, $\{\alpha \in \Gamma^0(\Lambda^2 T^*B) : \alpha^n \text{ não se anula}\}$. Desta discussão conclui-se a seguinte proposição.

1.4.4. Proposição
Seja B uma variedade aberta de dimensão $2n$ ($n \in \mathbb{N}$). Então a aplicação

$$\begin{aligned} d\colon \{\alpha \in \Gamma^1(T^*B) : (d\alpha)^n \text{ não se anula}\} &\longrightarrow \{\alpha \in \Gamma^0(\Lambda^2 T^*B) : \alpha^n \text{ não se anula}\} \\ \alpha &\longmapsto d\alpha \end{aligned}$$

(nos espaços acima consideram-se as topologias fracas-C^1 e C^0, respectivamente) é uma equivalência de homotopia fraca.

Demonstração. Pela discussão anterior (tomando $\mathcal{R}$ como acima) sabemos que $\mathcal{R}$ é aberta e $\mathrm{Diff}(B)$-invariante pelo que o teorema 1.1.57 garante que $j^1 : \mathrm{Sol}^1(\mathcal{R}|B) \to \Gamma^0(\mathcal{R}|B)$ é uma equivalência de homotopia fraca. Por outro lado, sabemos também que D induz uma equivalência de homotopia $\Gamma^0(\mathcal{R}|B) \to \{\alpha \in \Gamma^0(\Lambda^2 T^*B) : \alpha^n \text{ não se anula}\}$ e portanto a composta

$$\begin{aligned} d : \mathrm{Sol}^1(\mathcal{R}|B) &\longrightarrow \{\alpha \in \Gamma^0(\Lambda^2 T^*B) : \alpha^n \text{ não se anula}\} \\ \alpha &\longmapsto d\alpha \end{aligned}$$

é uma equivalência de homotopia fraca (a composta é d pois $D \circ j^1 = d$ por definição de D). O resultado segue agora do facto de $\mathrm{Sol}^1(\mathcal{R}|B) = \{\alpha \in \Gamma^1(E) : (d\alpha)^n \text{ não se anula}\}$. ■

O teorema seguinte é uma consequência simples da proposição anterior.

1.4.5. Teorema (Gromov)
Seja B uma variedade aberta. Então B admite uma forma simpléctica sse admite uma forma-2 contínua não degenerada (isto é, um elemento $\alpha \in \Gamma^0(\Lambda^2 T^*B)$ tal que α^n não se anula). Mais precisamente, qualquer forma--2 contínua não degenerada em B é homotópica através de formas-2 não degeneradas a uma forma simpléctica.

Demonstração. Obviamente, se B admite uma forma simpléctica, também admite uma forma-2 não degenerada. Por outro lado, pelo teorema anterior, sabemos que se B admite uma forma-2 contínua não degenerada, α, então existe uma forma-1 $\beta \in \Gamma^1(T^*B)$ tal que $d\beta$ é não degenerada e homotópica em $\{\omega \in \Gamma^0(\Lambda^2 T^*B) : \omega^n \text{ não se anula}\}$ (com a topologia fraca-C^1) a α. Então, aproximando β (na topologia forte-C^1 em $\Gamma^1(T^*B)$), obtemos uma forma-1 γ suave em B tal que $d\gamma$ é não degenerada e homotópica através de formas não degeneradas a $d\beta$ e portanto também a α. Em particular, $d\gamma$ é uma forma simpléctica (exacta) em B que é homotópica (através de formas não degeneradas) a α. ■

2. Γ-estruturas

As Γ-estruturas (como referido na introdução) são úteis para obter (sob determinadas condições) uma classificação topológica de estruturas geométricas sobre variedades em termos de classes de homotopia de aplicações para um espaço classificante. Isto permite formular determinados problemas de integrabilidade em termos "puramente topológicos", nomeadamente, em problemas de levantamento de (classes de homotopia de) aplicações.

Alguns exemplos típicos de problemas de integrabilidade em geometria são:

- Quando é que uma distribuição numa variedade é homotópica a uma distribuição integrável (ou seja, que provém de uma folheação na variedade)?
- Quando é que uma estrutura quasi-complexa numa variedade é homotópica (por estruturas quasi-complexas) a uma estrutura quasi-complexa integrável (isto é, que está associada a uma estrutura complexa)?
- Quando é que uma forma-2 não degenerada se pode deformar (através de formas não degeneradas) numa forma-2 não degenerada e fechada (isto é, numa forma simpléctica)?

Neste capítulo segue-se de muito perto a exposição de Haefliger [6]. Na verdade, é recomendado que o leitor consulte essa exposição, pois é mais completa que a apresentada neste texto (a presente exposição é, para todos os efeitos, um resumo da exposição em Haefliger [6]). Outra referência do mesmo autor sobre este assunto é o artigo de Haefliger [5].

2.1. **Classificação de Γ-estruturas.**

Antes de se poder dar a definição de Γ-estrutura, é necessário introduzir o conceito de grupóide topológico.

2.1.1. Definição

Um grupóide topológico Γ *é um grupóide (pequeno) — isto é, uma categoria (pequena) em que todos os morfismos são isomorfismos — em que os conjuntos de morfismos de* Γ, Hom_Γ, *e conjunto dos objectos de* Γ, Ob_Γ, *são espaços topológicos tais que:*

- *as aplicações* $d_\Gamma, c_\Gamma : \mathrm{Hom}_\Gamma \to \mathrm{Ob}_\Gamma$ *(que a cada morfismo associam, respectivamente, o seu domínio e o seu codomínio) são contínuas e abertas.*
- *a aplicação de composição*
$$\begin{aligned} m_\Gamma : \mathrm{Hom}_\Gamma \times_{\mathrm{Ob}_\Gamma} \mathrm{Hom}_\Gamma &\longrightarrow \mathrm{Hom}_\Gamma \\ (f,g) &\longmapsto f \circ g \end{aligned}$$
(onde $\mathrm{Hom}_\Gamma \times_{\mathrm{Ob}_\Gamma} \mathrm{Hom}_\Gamma = \{(f,g) \in \mathrm{Hom}_\Gamma \times \mathrm{Hom}_\Gamma : c_\Gamma(g) = d_\Gamma(f)\}$*) é contínua.*
- *a aplicação de inversão*
$$\begin{aligned} inv_\Gamma : \mathrm{Hom}_\Gamma &\longrightarrow \mathrm{Hom}_\Gamma \\ f &\longmapsto f^{-1} \end{aligned}$$
é contínua.
- *a aplicação*
$$\begin{aligned} id_\Gamma : \mathrm{Ob}_\Gamma &\longrightarrow \mathrm{Hom}_\Gamma \\ x &\longmapsto \mathrm{id}_x \end{aligned}$$
é contínua.

Um morfismo entre grupóides topológicos, Γ *e* Λ, *é um functor entre* Γ *e* Λ *tal que as aplicações induzidas nos objectos e nos morfismos são contínuas.*

2.1.2. Observação
Observe-se que o mapa id_Γ *é um homeomorfismo de* Ob_Γ *sobre o subespaço de* Hom_Γ *constituído pelos morfismos identidade de* Γ*.*

2.1.3. Observação
A composição num grupóide topológico Γ *será daqui em diante indicada com notação multiplicativa: a composição de dois morfismos* f*,* g *de* Γ *escrever--se-à* fg*.*

2.1.4. Exemplo
Um grupo topológico é naturalmente um grupóide topológico com apenas um objecto.

2.1.5. Exemplo
O exemplo de grupóide topológico mais usado no seguimento é o de grupóide topológico Γ_S associado a um pseudo-grupo (ver definição 1.2.17) S de difeomorfismos de $\mathbb{R}^n$ ($n \in \mathbb{N}$). Define-se $\mathrm{Ob}_{\Gamma_S} = \mathbb{R}^n$ (enquanto espaço topológico). Dados $f \in \mathrm{Diff}(\mathbb{R}^n)$ e x no domínio de f, indica-se por f^x o germe de f em x. Então define-se Hom_{Γ_S} como sendo o conjunto dos germes f^x para $f \in S$ e x no domínio de f (para f e x nestas condições define-se $c_{\Gamma_S}(f^x) = x$ e $d_{\Gamma_S}(f^x) = f(x)$). Além disso, a topologia em Hom_{Γ_S} é a maior topologia para a qual as aplicações

$$\begin{aligned} U &\longrightarrow \mathrm{Hom}_{\Gamma_S} \\ x &\longmapsto f^x \end{aligned}$$

são contínuas para $f \in S$ com domínio num aberto U de M. De forma equivalente, os conjuntos $\{f^x : x \in U\}$ para $f \in S$ com domínio num aberto U de M formam uma base para a topologia de Hom_{Γ_S}. As aplicações c_{Γ_S} e d_{Γ_D} são homeomorfismos locais. Em particular, temos que as secções locais de $c_{\Gamma_S} : \mathrm{Hom}_{\Gamma_S} \to \mathrm{Ob}\,\Gamma_S$ coincidem localmente com $x \mapsto g^x$ para algum $g \in S$.

Dado um pseudo-grupo de difeomorfismos de $\mathbb{R}^n$ ($n \in \mathbb{N}$), S, temos um morfismo de grupóides topológicos $\Gamma_S \to GL(n, \mathbb{R})$

$$\begin{aligned} \Gamma_S &\longrightarrow GL(n, \mathbb{R}) \\ f^x &\longmapsto d_x f \end{aligned}$$

Além disso, se S, T são pseudo-grupos de difeomorfismos de $\mathbb{R}^n$ com $S \subset T$ então tem-se que Hom_{Γ_S} é um aberto de Hom_{Γ_T}.

Alguns dos exemplos importantes de pseudo-grupos de difeomorfismos de $\mathbb{R}^q$ ($q \in \mathbb{N}$) são:

- para q par, o subconjunto de $\mathrm{Diff}(\mathbb{R}^q)$ constituído pelos difeomorfismos simplécticos entre abertos de $\mathbb{R}^q$ (para a forma simpléctica usual em $\mathbb{R}^q$) que se designará por $\mathrm{AutSp}(q)$.
- para $q = 2n$ (com $n \in \mathbb{N}$), o subconjunto de $\mathrm{Diff}(\mathbb{R}^q)$ constituído pelos difeomorfismos holomorfos entre abertos de $\mathbb{R}^q = \mathbb{C}^n$, que se designará de $\mathrm{Aut}\mathbb{C}(n)$.

A definição de Γ-estrutura consiste agora numa generalização óbvia do conceito de fibrado principal (localmente trivial) ao caso mais geral de um grupóide (como referido num dos exemplos anteriores, um grupo topológico é um grupóide topológico de forma natural).

2.1.6. Definição
Sejam Γ *um grupóide topológico e* X *um espaço topológico. Então um* cociclo *em* Γ *sobre uma cobertura aberta* $(U_i)_i \in I$ *(*I *um conjunto) de* X *associa a cada* $i, j \in I$ *uma aplicação contínua* $\gamma_{i,j} : U_i \cap U_j \to \mathrm{Hom}_\Gamma$ *tal que*

$$\forall_{x \in U_i \cap U_j \cap U_k} \quad \gamma_{i,k}(x) = \gamma_{i,j}(x)\gamma_{j,k}(x)$$

para quaisquer $i, j, k \in I$ *(em particular,* $\gamma_{i,i}$ *toma valores nos morfismos identidade de* Γ *para qualquer* $i \in I$ *— e induz então um mapa* $(id_\Gamma)^{-1} \circ \gamma_{i,i} : U_i \to \mathrm{Ob}_\Gamma$*). Indica-se um tal cociclo por* $((U_i)_{i\in I}, (\gamma_{i,j})_{i,j\in I})$*.*

Dois cociclos $((U_i)_{i\in I}, (\gamma_{i,j})_{i,j\in I})$*,* $((V_i)_{i\in J}, (\lambda_{i,j})_{i,j\in J})$ *em* Γ *sobre* X *são* equivalentes *se existirem aplicações contínuas* $\delta_{i,j} : U_i \cap V_j \to \mathrm{Hom}_\Gamma$ *para quaisquer* $i \in I$*,* $j \in J$ *tais que:*

$$\forall_{x \in U_i \cap V_j \cap V_k} \quad \delta_{i,j}(x)\lambda_{j,k}(x) = \delta_{i,k}(x)$$

$$\forall_{x \in U_i \cap U_l \cap V_j} \quad \gamma_{i,l}(x)\delta_{l,j}(x) = \delta_{i,j}(x)$$

para quaisquer $i, l \in I$ *e* $j, k \in J$*.*

Uma Γ-estrutura *em* X *é uma classe de equivalência de cociclos em* Γ *sobre* X*. Uma* Γ*-estrutura em* X *diz-se* numerável *se for a classe de equivalência de um cociclo em* Γ *sobre uma cobertura aberta numerável de* X[12]*.*

Como é imediato da definição acima, se Γ é um grupo topológico, as Γ-estruturas (numeráveis) sobre um espaço X estão em correspondência biunívoca (natural) com as classes de isomorfismo de Γ-fibrados principais localmente triviais (numeráveis) sobre X (ver Husemoller [10], nomeadamente as secções 5.2 e 5.3).

2.1.7. Exemplo
Seja S um pseudo-grupo de difeomorfismos de $\mathbb{R}^n$ ($n \in \mathbb{N}$). Seja

$$((U_i)_{i\in I}, (\gamma_{i,j})_{i,j\in I})$$

um cociclo em Γ_S sobre um espaço X. Então as aplicações $f_i := (id_{\Gamma_S})^{-1} \circ \gamma_{i,i}$ para $i \in I$ são tais que dados $i, j \in I$ se tem que $\gamma_{i,j}(x)$ é um morfismo entre $f_j(x)$ e $f_i(x)$ para $x \in U_i \cap U_j$. Mas dado $x \in U_i \cap U_j$ e sendo $g \in S$ um representante do germe $\gamma_{i,j}(x)$ temos que (visto que a aplicação (U é o domínio de g)

$$\begin{aligned} U &\longrightarrow \mathrm{Hom}_{\Gamma_S} \\ x &\longmapsto g^x \end{aligned}$$

é contínua e tem como imagem um aberto de Hom_{Γ_S} — ver exemplo 2.1.5) $g^{f_j(y)} = \gamma_{i,j}(y)$ para y nalguma vizinhança de x em X. Em particular $g^{f_j(y)}$

[12]Uma cobertura aberta, $\mathcal{U}$, de um espaço topológico X diz-se numerável se existir uma partição da unidade (localmente finita), Σ, em X subordinada a $\mathcal{U}$ (isto é, para qualquer $\sigma \in \Sigma$, existe $U \in \mathcal{U}$ tal que $\overline{\sigma^{-1}(]0,1])} \subset U$).

é um morfismo entre $f_j(y)$ e $f_i(y)$ para y nalguma vizinhança de x. Isto é o mesmo que dizer que:

$$g \circ f_j = f_i$$

nalguma vizinhança de x.

Assim, concluímos que dados $i, j \in I$ e $x \in U_i \cap U_j$, existe $g \in S$ definido numa vizinhança de $f_j(x)$ tal que

$$g \circ f_j = f_i$$

nalguma vizinhança de x em X. Em particular, se as aplicações f_i forem abertas para $i \in I$, concluímos que o cociclo é inteiramente determinado pelas aplicações f_i para $i \in I$.

Veremos mais tarde como alguns tipos de estruturas geométricas (como por exemplo, estruturas simplécticas, estruturas complexas ou folheações em variedades) correspondem a Γ-estruturas, ou mais precisamente, Γ-folheações (para algum grupóide topológico Γ).

2.1.8. Definição
Dada uma função contínua $f : X \to Z$ entre espaços topológicos e dado um cociclo $c = ((U_i)_{i\in I}, (\gamma_{i,j})_{i,j\in I})$ (I um conjunto) num grupóide topológico Γ sobre Z, define-se o pullback $f^*c := ((f^{-1}(U_i))_{i\in I}, (\gamma_{i,j} \circ f)_{i,j\in I})$. *Se τ é uma Γ-estrutura em Z representada por um cociclo c então o* pullback de τ por f, *$f^*\tau$, é a Γ-estrutura em X representada pelo cociclo f^*c.*

2.1.9. Observação
Observe-se que, nas condições da definição acima, se τ é numerável então $f^*\tau$ também é numerável.

2.1.10. Definição
*Seja X um espaço topológico e sejam τ_0 e τ_1 Γ-estruturas em X (onde Γ é um grupóide topológico). σ e τ dizem-se (*numeravelmente*) *homotópicas *se existir uma Γ-estrutura (numerável), τ, em $X \times [0,1]$ tal que $i_0^*\tau{=}\tau_0$ e $i_1^*\tau{=}\tau_1$ (onde*

$$\begin{aligned} i_t : X &\longrightarrow X \times [0,1] \\ x &\longmapsto (x,t) \end{aligned}$$

para $t \in \{0,1\}$).

2.1.11. Observação
No caso de um grupo topológico G, sabemos que duas G-estruturas numeravelmente homotópicas são na verdade iguais (ver Husemoller [10]*). Tal afirmação não é verdadeira em geral para grupóides topológicos.*

2.1.12. Observação
Dadas aplicações contínuas $f, g : X \to Z$ homotópicas e uma Γ-estrutura (para um grupóide topológico Γ) τ em Z, é imediato da definição acima que $f^*\tau$ e $g^*\tau$ são Γ-estruturas homotópicas em X. Se τ for numerável, então $f^*\tau$ e $g^*\tau$ são numeravelmente homotópicas.

Considere-se agora um grupóide topológico Γ. Se $f : X \to Z$ é uma aplicação contínua entre espaços topológicos e τ_0, τ_1 são Γ-estruturas homotópicas em Z então $f^*\tau_0$ é homotópica a $f^*\tau_1$.

Dado um grupóide topológico Γ, para cada espaço X, o conjunto das classes de homotopia numerável de Γ-estruturas numeráveis em X designam-se por $St_\Gamma(X)$. Pela observação feita no parágrafo anterior, é fácil concluir que St_Γ constitui um functor contravariante $\mathcal{Top} \to \mathcal{Set}$ (na verdade, pela observação 2.1.12, St_Γ define um functor da categoria dos espaços topológicos e classes de homotopia de funções contínuas para $\mathcal{Set}$).

Obtém-se então o seguinte teorema de classificação de classes de homotopia numerável de Γ-estruturas.

2.1.13. Teorema
Dado um grupóide topológico Γ, o functor St_Γ é naturalmente isomorfo ao functor $[-, B\Gamma]$ para algum espaço topológico $B\Gamma$.

2.1.14. Observação
A $B\Gamma$ como no teorema anterior (ignorando a não unicidade de um tal espaço — tal espaço está no entanto definido a menos de equivalência de homotopia) é usual chamar-se o espaço classificante de Γ.

Não se faz aqui a demonstração deste teorema. No entanto, fazemos uma discussão de duas possíveis maneiras de o mostrar.

- Uma forma de demonstrar um resultado próximo do anterior (o resultado análogo ao anterior na categoria dos complexos-CW em vez de na categoria dos espaços topológicos — este resultado é suficiente para as aplicações usuais) consiste em usar o teorema de representatividade de Brown (ver Hatcher [8]) que permite determinar em que condições um functor contravariante da categoria de homotopia dos complexos-CW pontuados para $\mathcal{Set}$ é naturalmente isomorfo ao functor $[-, Z]_*$ para algum complexo-CW pontuado Z.
- Uma demonstração construtiva do teorema acima consiste em construir um modelo para $B\Gamma$ (para um grupóide topológico Γ) e uma Γ-estrutura numerável, ω_Γ, em $B\Gamma$ e provar directamente que para cada espaço topológico X a aplicação

$$\begin{aligned} [X, B\Gamma] &\longrightarrow St_\Gamma(X) \\ f &\longmapsto f^*(\omega_\Gamma) \end{aligned}$$

  é uma bijecção. A construção usualmente efectuada para grupos topológicos com vista a classificar fibrados principais (construção de Milnor — ver Husemoller [10]) generaliza praticamente sem alterações ao caso de grupóides topológicos (ver Haefliger [6]). A propósito de construções de espaços classificantes (e não só), uma referência muito interessante é o artigo de Segal [16][13] que faz uma abordagem mais abstracta a estas (e outras) construções que generaliza de forma óbvia ao caso de grupóides topológicos.

Sendo Γ um grupóide topológico, observe-se que a função identidade $\mathrm{id}_{B\Gamma}$ corresponde pela bijecção $[B\Gamma, B\Gamma] \approx St_\Gamma(B\Gamma)$ a um elemento $\omega_\Gamma \in$

[13] O leitor interessado poderá também reparar nas definições categoriciais que Segal apresenta no seu artigo para G-fibrados principais (localmente triviais) com G um grupo topológico. Estas definições generalizam trivialmente ao caso de grupóides topológicos resultando no conceito de Γ-estruturas.

$St_\Gamma(B\Gamma)$ tal que o isomorfismo do teorema entre St_Γ e $[-, B\Gamma]$ é dado por (pela naturalidade do isomorfismo do teorema):

$$\begin{aligned} [X, B\Gamma] &\longrightarrow St_\Gamma(X) \\ f &\longmapsto f^*(\omega_\Gamma) \end{aligned}$$

A um elemento $\omega_\Gamma \in St_\Gamma(G\Gamma)$ como acima chama-se uma Γ-estrutura universal em $B\Gamma$.

2.1.15. Definição
Seja $\varphi : \Gamma \to \Lambda$ um morfismo entre grupóides topológicos. Então dado um espaço X e um cociclo $c = ((U_i)_i \in I, (\gamma_{i,j})_{i,j\in I})$ em Γ sobre X, φ induz o seguinte cociclo em Λ sobre X: $\varphi_* c = ((U_i)_i \in I, (\varphi \circ \gamma_{i,j})_{i,j\in I})$. Dada uma Γ-estrutura τ em X representada por um cociclo c, define-se o push-forward de τ por φ, $\varphi_*\tau$, como sendo a Λ-estrutura em X representada pelo cociclo $\varphi_* c$.

2.1.16. Exemplo
Dado um pseudo-grupo de difeomorfismos de $\mathbb{R}^n$ ($n \in \mathbb{N}$), S, temos um morfismo $\varphi : \Gamma_S \to G$ (para algum subgrupo G de $GL(n, \mathbb{R})$) induzido por derivação (ver exemplo 2.1.5). Se for τ uma Γ-estrutura num espaço X, então $\varphi_*\tau$ é uma G-estrutura, isto é, um G-fibrado principal (localmente trivial) sobre X. O fibrado vectorial associado a este G-fibrado principal designa-se por $\nu(\tau)$.

A definição de push-forward por um morfismo $\varphi : \Gamma \to \Lambda$ entre grupóides topológicos passa às classes de homotopia (numerável) de Γ-estruturas (numeráveis) e Λ-estruturas induzindo uma transformação natural $St_\Gamma \to St_\Lambda$ e portanto uma transformação natural $[-, B\Gamma] \to [-, B\Lambda]$ que corresponde pelo lema de Yoneda (aplicado à categoria dos espaços topológicos e classes de homotopia de aplicações contínuas) a uma aplicação $B\varphi : B\Gamma \to B\Lambda$. Observe-se que para as construções acima referidas dos espaços classificantes, este morfismo é na verdade uma aplicação construída directamente de forma natural a partir de φ.

2.2. **Classificação de Γ-folheações.**

O conceito de Γ-estrutura é muito geral e o teorema de classificação obtido não é suficientemente restritivo de forma a ser útil na formulação de problemas de integrabilidade como referido no início deste capítulo. Para isso é mais adequado o conceito de Γ-folheação.

2.2.1. Definição
*Seja S um pseudo-grupo de difeomorfismos de $\mathbb{R}^q$ com $q \in \mathbb{N}$ (em particular, Γ_S é um sub-grupóide topológico aberto de $\Gamma_{\mathrm{Diff}(\mathbb{R}^q)}$). Uma Γ_S-*folheação *numa variedade B é uma Γ_S-estrutura que é representada por um cociclo $((U_i)_{i\in I}, (\gamma_{i,j})_{i,j\in I})$ tal que as aplicações $f_i := (id_{\Gamma_S})^{-1} \circ \gamma_{i,i} : U_i \to \mathbb{R}^q$ são submersões para $i \in I$.*

2.2.2. Observação
Nas condições da definição acima, e em vista do exemplo 2.1.7 (visto que neste caso as aplicações f_i para $i \in I$ são abertas), temos que as aplicações f_i para $i \in I$ determinam completamente a Γ_S-folheação. Por outro lado, qualquer conjunto de submersões $f_i : U_i \to \mathbb{R}^q$ para $i \in I$ (sendo $(U_i)_{i\in I}$ —

I um conjunto — uma cobertura aberta de B) determina uma Γ_S-folheação desde que para $i, j \in I$ e $x \in U_i \cap U_j$ existe $g \in S$ tal que g está definido numa vizinhança de x e

$$f_i = g \circ f_j$$

nalguma vizinhança de x em B (note-se que o cociclo para a Γ_S-folheação assim construída está definido nalgum refinamento de $(U_i)_{i\in I}$).

Em conclusão, dar uma Γ_S-folheação B é equivalente a dar uma família de submersões $f_i : U_i \to \mathbb{R}^q$ (para alguma cobertura aberta $(U_i)_{i\in I}$ de B) tais que para quaisquer $i, j \in I$ e $x \in U_i \cap U_j$, existe $g \in S$ definido numa vizinhança de x tal que

$$f_i = g \circ f_j$$

numa vizinhança de x (informalmente, pode enunciar-se esta propriedade dizendo que as funções de transição entre os f_i's ($i \in I$) têm germes em S).

Em particular, uma Γ_S-folheação, τ em B determina uma folheação (de codimensão q) $\mathcal{F}\tau$ em B (note-se que, pelo parágrafo anterior, dar uma $\Gamma_{\mathrm{Diff}(\mathbb{R}^q)}$-folheação em B é o mesmo que dar uma folheação de codimensão q em B).

2.2.3. Exemplo

Sendo B uma variedade de dimensão n, em vista da observação anterior, temos que:

- dar uma estrutura simpléctica em B é equivalente a dar uma $\Gamma_{\mathrm{AutSp}(n)}$--estrutura em B (n par).
- dar uma estrutura complexa em B é equivalente a dar uma $\Gamma_{\mathrm{Aut}\mathbb{C}(p)}$--estrutura em B (onde $n = 2p$).
- dar uma folheação de codimensão $q \in \mathbb{N}$ em B é equivalente a dar uma $\Gamma_{\mathrm{Diff}(\mathbb{R}^q)}$-estrutura em B.

Mais geralmente, tem-se (em princípio) que qualquer estrutura geométrica determinada à custa de atlas (e propriedades das funções de transição) para uma variedade pode ser dada de forma equivalente por uma Γ_S-estrutura para um pseudo-grupo adequado de difeomorfismos de $\mathbb{R}^k$ (para algum $k \in \mathbb{N}$).

2.2.4. Definição

Seja S um pseudo-grupo de difeomorfismos de $\mathbb{R}^q$ ($q \in \mathbb{N}$). Duas Γ_S-folheações, τ_0 e τ_1, numa variedade sem bordo B dizem-se integralmente homotópicas *se existir uma Γ_S-folheação, τ, em $B \times [0,1]$ tal que $(i_0)^*\tau = \tau_0$ e $(i_1)^*\tau = \tau_1$ (onde*

$$\begin{aligned} i_t : X &\longrightarrow X \times [0,1] \\ x &\longmapsto (x,t) \end{aligned}$$

para $t \in \{0,1\}$) e tal que a folheação em $B \times [0,1]$ associada a τ (ver observação 2.2.2) é transversal a $B \times \{t\}$ (abrevia-se esta propriedade dizendo que τ é transversal a $B \times \{t\}$) para $t \in [0,1]$.

Com este conceito de homotopia de Γ-folheações, é compreensível que o teorema de transversalidade de Gromov-Phillips seja fundamental na demonstração do seguinte teorema de classificação de Γ-folheações.

Dado um pseudo-grupo de difeomorfismos de $\mathbb{R}^q$ (com $q \in \mathbb{N}$), seja ω_{Γ_S} uma Γ_S-estrutura universal em $B\Gamma_S$.

2.2.5. Teorema
Seja S um pseudo-grupo de difeomorfismos de $\mathbb{R}^q$ (com $q \in \mathbb{N}$) e seja B uma variedade aberta sem bordo. Existe uma bijecção (natural) entre as classes de homotopia integrável de Γ_S-folheações em B e o conjunto das classes de homotopia de morfismos de fibrados vectoriais $TB \to \nu(\omega_{\Gamma_S})$ (ver exemplo 2.1.16) epimórficos fibra a fibra, isto é, $\pi_0(\mathrm{Epi}(TB, \nu(\omega_{\Gamma_S})))$.

Antes de começar a demonstração do teorema precisamos de fazer algumas observações e também de um lema cuja demonstração pode ser encontrada em Haefliger [5] (página 188) onde se observa que o lema é um caso particular do teorema 1 da secção IV.3 de Haefliger [4].

2.2.6. Observação
Seja S um pseudo-grupo de difeomorfismos de $\mathbb{R}^q$ ($q \in \mathbb{N}$). Recorde-se que a cada Γ_S-estrutura, τ, num espaço se associa um fibrado vectorial $\nu(\tau)$ (ver exemplo 2.1.16). Se τ for uma Γ_S-folheação numa variedade B, é elementar concluir da descrição (de uma Γ_S-folheação) dada na observação 2.2.2 que o fibrado normal à folheação $\mathcal{F}\tau$ (folheação em B associada a τ), $\nu(\mathcal{F}(\tau)) := TB/T(\mathcal{F}\tau)$, é naturalmente isomorfo a $\nu(\tau)$. Em particular, se o homomorfismo (induzido por derivação) $\Gamma_S \to GL(q, \mathbb{R})$ tiver imagem num subgrupo G de $GL(q, \mathbb{R})$, então tem-se que o fibrado normal à folheação $\mathcal{F}\tau$ admite uma redução do grupo de estrutura de $GL(q, \mathbb{R})$ a G.

2.2.7. Lema
Seja S um pseudo-grupo de difeomorfismos de $\mathbb{R}^q$ ($q \in \mathbb{N}$). Se M é uma variedade e τ é uma Γ_S-estrutura em M então existem uma variedade N, uma Γ_S-folheação τ' em N e uma aplicação contínua $f : M \to N$ tal que $f^*(\tau') = \tau$.

Demonstração do teorema 2.2.5. A demonstração deste teorema é aqui apenas esboçada e os seus pormenores são deixados ao cuidado do leitor.

Seja τ uma Γ_S-folheação em B. Seja ainda π o epimorfismo fibra a fibra dado pela composta

$$TB \longrightarrow \nu(\mathcal{F}\tau) = \nu\tau$$

(a última igualdade deriva da observação 2.2.6). Seja ainda $f : B \to B\Gamma_S$ uma aplicação tal que $\tau = f^*\omega_{\Gamma_S}$ (isto é, f classifica τ). Naturalmente associado a f tem-se (por definição do fibrado vectorial associado a uma Γ_S--estrutura) um morfismo de fibrados vectoriais $\rho : \nu(\tau) \to \nu(\omega_{\Gamma_S})$ que cobre $f : B \to B\Gamma_S$ e que é um isomorfismo fibra a fibra. A aplicação referida no enunciado do teorema associa a τ a classe de equivalência de $\rho \circ \pi$ em $\pi_0(\mathrm{Epi}(TB, \nu(\omega_{\Gamma_S})))$. É fácil ver que esta aplicação está bem definida.

Prova-se apenas a sobrejectividade da aplicação. A prova da injectividade segue argumentos semelhantes e é deixada ao cuidado do leitor.

Seja então $\alpha : TB \to \nu(\omega_{\Gamma_S})$ um morfismo de fibrados vectoriais epimórfico em cada fibra e seja $f : B \to B\Gamma_S$ a aplicação coberta por α. α induz então um epimorfismo fibra a fibra $\alpha' : TB \to f^*(\nu(\omega_{\Gamma_S}))$. Pelo lema acima, existe uma variedade E, uma Γ_S-folheação τ em E e uma aplicação contínua

$g : B \to E$ tal que $g^*\tau = f^*\omega_{\Gamma_S}$ de onde segue que $g^*(\nu(\tau)) = f^*(\nu(\omega_{\Gamma_S}))$. Assim tem-se um epimorfismo fibra a fibra $eg : TB \to \nu(\mathcal{F}\tau)$ dado pela composta

$$TB \xrightarrow{\alpha'} f^*(\nu(\omega_{\Gamma_S})) == g^*(\nu(\tau)) \longrightarrow \nu(\tau) == \nu(\mathcal{F}\tau)$$

sobre a aplicação $g : B \to E$. Como $\nu(\mathcal{F})$ é um sub-fibrado de TE, pelo teorema da transversalidade de Gromov-Phillips (teorema 1.4.2) tem-se que g é homotópico a uma aplicação (que se pode supor suave, usando aproximação por aplicações C^∞) $h : B \to E$ transversal a $\mathcal{F}\tau$ tal que o epimorfismo fibra a fibra

$$TB \xrightarrow{dh} TE \longrightarrow \nu(\mathcal{F}\tau) \tag{13}$$

representa o mesmo elemento de $\pi_0(\mathrm{Epi}(TB, \nu(\omega_{\Gamma_S})))$ que eg. Sendo assim, a Γ-folheação $h^*\tau$ ($h^*\tau$ é uma Γ-folheação pois o morfismo em (13) é um epimorfismo em cada fibra) é tal que a sua imagem pela aplicação referida no enunciado é o morfismo α inicial. Conclui-se que a aplicação referida no enunciado é sobrejectiva como se pretendia mostrar. ■

2.2.8. Observação

Observe-se que o teorema de transversalidade de Gromov-Phillips (teorema 1.4.2) é fundamental na demonstração do teorema acima.

Este teorema de classificação de Γ-folheações é bastante mais útil do ponto de vista geométrico que o teorema de classificação de Γ-estruturas. Para corroborar esta afirmação procurar-se-à agora reformular o teorema de classificação de Γ-folheações de forma a ser possível usá-lo em problemas de integrabilidade.

2.2.9. Definição

*Seja G um subgrupo de $GL(q, \mathbb{R})$ para algum $q \in \mathbb{N}$. Uma G-*estrutura no fibrado tangente *TB a uma variedade B é um sub-fibrado vectorial de rank q, E, de TB e uma redução do grupo de estrutura de E de $GL(q, \mathbb{R})$ a G. Duas G-estruturas em TB, E e F, dizem-se homotópicas se existir um morfismo de fibrados vectoriais*

$$\begin{array}{ccc} E \times [0,1] & \xrightarrow{F} & TB \\ \big\downarrow & & \big\downarrow \\ B \times [0,1] & \xrightarrow{pr} & B \end{array}$$

(onde $pr : B \times [0,1] \to B$ é a projecção no primeiro factor) injectivo fibra a fibra tal que $F \circ i_0$ é a inclusão de E em TB e $F \circ i_1 = i \circ f$ (onde $i : F \to B$ é a inclusão) para algum isomorfismo de G-fibrados vectoriais sobre B, $f : E \to F$ — onde

$$\begin{aligned} i_t : E &\longrightarrow E \times [0,1] \\ x &\longmapsto (x, t) \end{aligned}$$

para $t \in \{0, 1\}$.

2.2.10. Exemplo

Alguns exemplos simples do conceito anterior são bastante comuns em geometria (seja $n \in \mathbb{N}$):

- uma $GL(n,\mathbb{R})$-estrutura em TB para uma variedade B é o mesmo que um sub-fibrado de rank n de TB.
- dar uma $GL(n,\mathbb{C})$-estrutura (considera-se $GL(n,\mathbb{C})$ como um subgrupo de $GL(2n,\mathbb{R})$) em TB para uma variedade B de dimensão $2n$ é equivalente a dar uma estrutura complexa no fibrado tangente a B (note-se que a estrutura não tem que ser suave pelo que não corresponde necessariamente a uma estrutura quasi-complexa em B).
- dar uma $Sp(n)$-estrutura ($Sp(n)$ é o subgrupo de $GL(n,\mathbb{R})$ constituído pelas transformações lineares que que preservam a forma simpléctica usual em $\mathbb{R}^n$) em TB para uma variedade B de dimensão n par é equivalente a dar uma forma-2 (contínua) não degenerada em B.

Dados um subgrupo G de $GL(q,\mathbb{R})$ ($q \in \mathbb{N}$) e $n \in \mathbb{N}$ com $n \geq q$ consideremos (daqui em diante) a aplicação $\oplus : BG\times BGL(n-q,\mathbb{R}) \to BGL(n,\mathbb{R})$ induzida pela composta da inclusão $G\times GL(n-q,\mathbb{R}) \to GL(q,\mathbb{R})\times GL(n-q,\mathbb{R})$ com a aplicação canónica $GL(q,\mathbb{R}) \times GL(n-q,\mathbb{R}) \to GL(n,\mathbb{R})$. Supomos, sem perda de generalidade, que $\oplus$ é uma fibração (podemos sempre substituir $\oplus$ por uma fibração sem alterar o tipo de homotopia dos espaços envolvidos). Então, se for B uma variedade de dimensão n e $t : B \to BGL(n,\mathbb{R})$ uma aplicação que classifica o fibrado tangente $TB \to B$, tem-se que o conjunto das classes de homotopia de G-estruturas em TB está em bijecção (natural) com o conjunto das classes de homotopia de levantamentos ($\widetilde{t}$ como no diagrama abaixo) de t a $BG \times BGL(n-q,\mathbb{R})$ através de $\oplus$ (isto é, $\pi_0(\{\widetilde{t} \in C(B, BG \times BGL(n-q,\mathbb{R})) : \oplus \circ \widetilde{t} = t\})$ — considera-se a topologia compacta aberta)

$$\begin{tikzcd} & BG \times BGL(n-q,\mathbb{R}) \arrow[d, "\oplus"] \\ B \arrow[ur, dashed, "\widetilde{t}"] \arrow[r, "t"'] & BGL(n,\mathbb{R}) \end{tikzcd}$$

(deixa-se ao cuidado do leitor a descrição explícita da bijecção referida acima e a verificação simples de que é, de facto, uma bijecção).

Seja agora dado um pseudo-grupo S de difeomorfismos de $\mathbb{R}^q$ e suponha-se que a aplicação induzida por derivação $\Gamma_S \to GL(q,\mathbb{R})$ tem imagem em G. Então aquela aplicação induz uma outra aplicação $\nu : B\Gamma_S \to BG$. Observe-se que ν corresponde à aplicação que classifica $\nu(\omega_{\Gamma_S})$. Além disso, uma Γ_S-folheação τ em B induz uma G-estrutura canónica em TB, nomeadamente a inclusão de $\nu(\mathcal{F}\tau)$ em TB.

Considere-se o diagrama comutativo

$$\begin{tikzcd} B\Gamma_S \times BGL(n-q,\mathbb{R}) \arrow[d] \arrow[dr, "\nu\times\mathrm{id}"] & \\ BGL(n,\mathbb{R}) & BG \times BGL(n-q,\mathbb{R}) \arrow[l, "\oplus"'] \end{tikzcd}$$

Supõe-se no seguimento (sem perda de generalidade) que todas as aplicações no diagrama são fibrações.

Podemos agora enunciar um corolário do teorema de classificação anterior.

2.2.11. Proposição

Seja S um pseudo-grupo de difeomorfismos de $\mathbb{R}^q$ (com $q \in \mathbb{N}$) e seja B uma variedade aberta sem bordo de dimensão $n \in \mathbb{N}$ ($q \leq n$). Seja ainda $t : B \to BGL(n, \mathbb{R})$ uma aplicação que classifica o fibrado tangente $TB \to B$ de B. Existe uma bijecção natural entre o conjunto das classes de homotopia integrável de Γ_S-folheações em B e o conjunto das classes de homotopia de levantamentos de t para $B\Gamma_S \times BGL(n-q, \mathbb{R})$ (isto é, $\pi_0(\{\widetilde{t} \in C(B, B\Gamma_S \times BGL(n-q, \mathbb{R})) : \oplus \circ (\nu \times \mathrm{id}) \circ \widetilde{t} = t\})$):

$$\begin{tikzcd} & B\Gamma_S \times BGL(n-q,\mathbb{R}) \arrow[d, "\oplus\circ(\nu\times\mathrm{id})"] \\ B \arrow[ur, dashed] \arrow[r, "t"] & BGL(n,\mathbb{R}) \end{tikzcd}$$

Demonstração. Dá-se apenas a ideia da demonstração. O leitor interessado poderá fazer a demonstração por si ou consultar Haefliger [5] (onde a demonstração é feita directamente a partir do teorema de transversalidade de Gromov-Phillips).

Interessa primeiro caracterizar os levantamentos de t. Estes levantamentos estão em bijecção com as classes de equivalência de triplos (f, ξ, h) com $f : X \to B\Gamma_S$, ξ um fibrado vectorial de dimensão $n - q$ sobre B e h um isomorfismo entre TB e $\xi \oplus f^*(\nu(\omega_{\Gamma_S}))$ (sendo que dois triplos destes, (f_0, ξ_0, h_0) e (f_1, ξ_1, h_1), dizem-se equivalentes se existem uma homotopia $F : X \to B\Gamma_S$ com $F_0 = f_0$, $F_1 = f_1$ (que induz um isomorfismo k entre $f_0^*(\nu(\omega_{\Gamma_S}))$ e $f_1^*(\nu(\omega_{\Gamma_S})))$, um isomorfismo l entre ξ_0 e ξ_1 e uma homotopia (através de isomorfismos) entre os isomorfismos h_0 e $h_1 \circ (k \oplus l)$). Observe-se que um morfismo de fibrados vectoriais $TB \to \nu(\omega_{\Gamma_S})$ sobrejectivo nas fibras induz um tal triplo. Aplicando o teorema de classificação 2.2.5 é possível obter a conclusão pretendida. ■

Este teorema é agora directamente aplicável a reformular problemas de integrabilidade em variedades abertas (sem bordo). Na verdade, temos o seguinte corolário imediato da proposição anterior e da discussão precedente.

2.2.12. Corolário

Seja S um pseudo-grupo de difeomorfismos de $\mathbb{R}^q$ ($q \in \mathbb{N}$). Suponha-se que a aplicação induzida por derivação $\Gamma_S \to GL(q, \mathbb{R})$ tem imagem no subgrupo G de $GL(q, \mathbb{R})$. Seja B uma variedade aberta sem bordo de dimensão $n \in \mathbb{N}$, $t : B \to BGL(n, \mathbb{R})$ uma aplicação classificando o fibrado tangente de B e $\widetilde{t} : B \to BG \times BGL(n-q, \mathbb{R})$ um levantamento de t (que classifica uma G-estrutura s em TB). Então s é homotópica a uma G-estrutura em TB induzida por uma Γ_S-folheação sse a aplicação $\widetilde{t}$ admite um levantamento a $B\Gamma_S \times BGL(n-q, \mathbb{R})$.

$$\begin{tikzcd} & B\Gamma_S \times BGL(n-q,\mathbb{R}) \arrow[d, "\nu\times\mathrm{id}"] \\ B \arrow[ur, dashed] \arrow[r, "\widetilde{t}"] \arrow[dr, "t"'] & BG \times BGL(n-q,\mathbb{R}) \arrow[d, "\oplus"] \\ & BGL(n,\mathbb{R}) \end{tikzcd}$$

Demonstração. Como referido acima, a conclusão segue imediatamente da proposição anterior e da discussão precedente após observar que a aplicação $\nu \times \mathrm{id}$ é tal que se um levantamento $f : B \to B\Gamma_S \times BGL(n-q, \mathbb{R})$ de t classifica a (classe de homotopia integrável da) Γ_S-estrutura τ, então $(\nu \times \mathrm{id}) \circ f$ classifica a (classe de homotopia da) G-estrutura em TB induzida por τ. ∎

Consideremos primeiro o problema que consiste em descobrir se uma forma-2 não degenerada numa variedade pode ser deformada (através de formas-2 não degeneradas) numa forma simpléctica. Pelo corolário anterior, este problema pode ser reformulado da forma que se descreve a seguir. Seja B uma variedade aberta sem bordo (é fácil eliminar a condição de B ter bordo vazio) de dimensão $n \in \mathbb{N}$ par. Sabe-se que uma $Sp(n)$-estrutura em TB é o mesmo que uma forma-2 (contínua) não degenerada em B (ver exemplo 2.2.10) e é fácil ver que a noção de homotopia de $Sp(n)$-estruturas coincide através desta identificação com o conceito óbvio de homotopia para formas-2 não degeneradas. Segue do corolário acima que se α é uma forma--2 não degenerada em B cuja $Sp(n)$-estrutura em TB correspondente, s, é classificada por uma aplicação $f_\alpha : B \to BSp(n)$, então s é homotópica a uma $Sp(n)$-estrutura em TB induzida por uma $\Gamma_{\mathrm{AutSp}(n)}$-folheação em B sse f_α admite um levantamento:

$$\begin{tikzcd} & B\Gamma_{\mathrm{AutSp}(n)} \arrow[d, "\nu"] \\ B \arrow[r, "f_\alpha"] \arrow[ur, dashed] & BSp(n) \end{tikzcd}$$

Usando a identificação de $\mathrm{AutSp}(n)$-estruturas em B com estruturas simplécticas em B (ver exemplo 2.2.3), é fácil concluir que s é homotópica a uma $Sp(n)$-estrutura em TB induzida por uma $\Gamma_{\mathrm{AutSp}(n)}$-folheação sse α é homotópica através de formas não degeneradas a uma forma simpléctica. Em particular, existe um levantamento para f_α sse α é homotópica por formas não degeneradas a uma forma simpléctica.

Desta forma, transformámos o problema de integrabilidade de formas-2 não degeneradas numa variedade aberta num problema de homotopia. Note--se, no entanto, que a resposta a este problema já foi dada no teorema 1.4.5 que nos diz que qualquer forma-2 não degenerada numa variedade aberta B é homotópica através de formas não degeneradas a uma forma simpléctica em B.

No entanto, este exemplo mostra a importância de conhecer a conexidade da aplicação ν.

A proposição seguinte é um exemplo simples de um cálculo da conexidade dessa aplicação.

2.2.13. Proposição
A aplicação $\nu : B\Gamma_{\mathrm{Diff}(\mathbb{R}^q)} \to BGL(q, \mathbb{R})$ *(para* $q \in \mathbb{N}$*) é uma* q*-equivalência.*

Demonstração. Uma $\Gamma_{\mathrm{Diff}(\mathbb{R}^q)}$-folheação numa variedade de dimensão q é o mesmo que uma folheação de dimensão 0 naquela variedade (ver exemplo 2.2.3). Assim, existe uma única $\Gamma_{\mathrm{Diff}(\mathbb{R}^q)}$-folheação numa variedade de dimensão q. Por outro lado, visto que o fibrado tangente a $S^i \times \mathbb{R}^{q-i}$ (com

$i \in \{0, \ldots, q-1\}$) é trivial tem-se que aquele é classificado por qualquer aplicação constante $cte : S^i \times \mathbb{R}^{q-1} \to BGL(q, \mathbb{R})$ e portanto, pelo teorema de classificação 2.2.5 conclui-se que as classes de homotopia de levantamentos de cte a $B\Gamma_{\mathrm{Diff}(\mathbb{R}^q)}$

$$\begin{tikzcd} & B\Gamma_{\mathrm{Diff}(\mathbb{R}^q)} \arrow[d, "\nu"] \\ B \arrow[ur, dashed] \arrow[r, "cte"'] & BGL(q, \mathbb{R}) \end{tikzcd}$$

estão em correspondência biunívoca com as classes de homotopia integrável de $\Gamma_{\mathrm{Diff}(\mathbb{R}^q)}$-folheações em $S^i \times \mathbb{R}^{q-1}$ (observe-se que $S^i \times \mathbb{R}^{q-1}$ é aberta e tem bordo vazio). Em particular (como existe apenas uma $\Gamma_{\mathrm{Diff}(\mathbb{R}^q)}$-folheação em $S^i \times \mathbb{R}^{q-1}$), temos que existe apenas uma classe de homotopia de levantamentos de cte a $B\Gamma_{\mathrm{Diff}(\mathbb{R}^q)}$. Mas as classes de homotopia de levantamentos de cte a $B\Gamma_{\mathrm{Diff}(\mathbb{R}^q)}$ estão em bijecção com as (ou melhor, são iguais às) classes de homotopia de aplicações $S^i \times \mathbb{R}^{q-1} \to F$ onde F é a fibra de ν sobre o único ponto na imagem de cte. Em particular, existe apenas uma classe de homotopia de aplicações $S^i \times \mathbb{R}^{q-1} \to F$ e portanto existe apenas uma única classe de homotopia de aplicações $S^i \to F$ para $i \in \{0, \ldots, q-1\}$ e sendo F a fibra de ν (que é uma fibração, por hipótese) sobre um qualquer ponto de $BGL(q, \mathbb{R})$. Assim, a aplicação ν é uma q-equivalência. ■

Para ver mais alguns exemplos de cálculos deste tipo, o leitor pode consultar Haefliger [6]. Em certos casos, na verdade, a resposta tem consequências geométricas interessantes. Por exemplo, o seguinte resultado é demonstrado no artigo de Landweber [12].

2.2.14. Teorema (Landweber)
A aplicação $\nu : B\Gamma_{\mathrm{Aut}\mathbb{C}(q)} \to BGL(q, \mathbb{C})$ ($q \in \mathbb{N}$) é uma q-equivalência.

A demonstração deste resultado apresentada no artigo referido acima passa na verdade por demonstrar um análogo complexo do teorema de transversalidade de Gromov-Phillips. Do teorema anterior seguem de forma simples (usando o teorema de classificação 2.2.5) os seguintes resultados interessantes acerca da existência de estruturas complexas em variedades abertas (apresentados no artigo de Landweber [12]).

2.2.15. Teorema (Landweber)
Seja B uma variedade aberta de dimensão $2q$ ($q \in \mathbb{N}$). Se $H^i(B, \mathbb{Z}) = 0$ para $i \in \mathbb{N}$ com $i > q$ então qualquer estrutura quasi-complexa em B é homotópica a uma estrutura quasi-complexa integrável (isto é, induzida por uma estrutura complexa em B).

2.2.16. Teorema (Landweber)
Seja B uma variedade aberta de dimensão $2q$ ($q \in \mathbb{N}$). Se $H^i(B, \mathbb{Z}) = 0$ para $i \in \mathbb{N}$ com $i \geq q$ então existe uma bijecção natural entre o conjunto das classes de homotopia de estruturas quasi-complexas em B e o conjunto das classes de homotopia integrável de estruturas complexas em B.

Referências

1. Ya. Eliashberg e N. M. Mishachev, *Introduction to the h-Principle*, Grad. Stud. Math., vol. 48, American Mathematical Society, Providence, RI, 2002.
2. H. Geiges, *h-Principles and Flexibility in Geometry*, Memoirs Amer. Math. Soc., vol. 164, no. 779, American Mathematical Society, Providence, RI, 2003.
3. M. Gromov, *Partial Differential Relations*, Ergeb. Math. Grenzgeb. (3), vol. 9, Springer-Verlag, Berlin, 1986.
4. A. Haefliger, *Structures feuilletées et cohomologie à valeur dans un faisceau de grupoides*, Comment. Math. Helvet. **32** (1958), 248–329.
5. ———, *Feuilletages sur les variétés ouvertes*, Topology **9** (1970), 183–194.
6. ———, Homotopy and integrability, in: *Manifolds – Amsterdam 1970*, Lect. Notes Math., vol. 197, Springer-Verlag, Berlin, 1971.
7. ———, Lectures on the theorem of Gromov, in: *Proc. Liverpool Singularities Sympos. II*, Lect. Notes Math., vol. 209, Springer-Verlag, Berlin, 1971.
8. A. Hatcher, *Algebraic Topology*, Cambridge University Press, Cambridge, 2002.
9. M. Hirsch, *Differential Topology*, Grad. Texts Math., vol. 33, Springer-Verlag, New York, 1976.
10. D. Husemoller, *Fibre Bundles*, Grad. Texts Math., vol. 20, Springer-Verlag, New York, 1994.
11. A. Kosinski, *Differential Manifolds*, Pure Applied Math., vol. 138, Academic Press, Boston, 1993.
12. P. Landweber, *Complex structures on open manifolds*, Topology **13** (1974), 69–75.
13. S. Mac Lane, *Categories for the Working Mathematician*, 2nd ed., Grad. Texts Math., vol. 5, Springer-Verlag, New York, 1998.
14. P. May, *A Concise Course in Algebraic Topology*, Chicago Lect. Math., University of Chicago Press, Chicago, 1999.
15. R. Palais, *Homotopy theory of infinite dimensional manifolds*, Topology **5** (1966), 1–16.
16. G. Segal, *Classifying spaces and spectral sequences*, Pub. Math. I.H.É.S. **34** (1968), 105–112.
17. S. Smale, *A classification of immersions of the two-sphere*, Trans. Amer. Math. Soc. **90** (1958), 281–290.
18. ———, *The classification of immersions of spheres in Euclidean spaces*, Ann. Math. **69** (1959), 327–344.
19. D. Spring, *Convex Integration Theory*, Monogr. Math., vol. 92, Birkhäuser, Basel, 1998.
20. ———, *The golden age of immersion theory in topology: 1959-1973. A mathematical survey from a historical perspective*, Bull. Amer. Math. Soc. **42** (2005), no. 2, 163–180.
21. A. Strøm, *Note on cofibrations*, Math. Scand. **19** (1966), 11–14.