Esferas exóticas

Ricardo Joel Andrade

Espaços localmente euclidianos

Definição: *Um* espaço localmente euclidiano de dimensão n, M, *é um espaço que é localmente como* $\mathbb{R}^n$*, isto é:*

cada ponto $x \in M$ *tem uma vizinhança* V *homeomorfa a um aberto de* $\mathbb{R}^n$*.*

$$\varphi \equiv \text{carta}$$
$$\{\varphi\} \equiv \text{atlas}$$

Exemplos:

- $S^n = \left\{x \in \mathbb{R}^{n+1} : \|x\| = 1\right\}$

  Atlas: projecções estereográficas

- não é um espaço localmente euclidiano

Variedades

Definição: *Uma* variedade (de dimensão n), M, *é um espaço localmente euclidiano de dimensão* n *tal que dadas* $\varphi, \psi \in$ *atlas,* $\varphi \circ \psi^{-1}$ *é um difeomorfismo.*

Exemplo: S^n é uma variedade

<u>Aplicação diferenciável</u>:

$f : M \to N$ tal que $\varphi \circ f \circ \psi^{-1}$ é diferenciável

Grupos de Cohomologia

$$H^k(-,G) : \{\text{espaços}\} \longrightarrow \{\text{grupos abelianos}\}$$

Propriedades:

- $H^k(\text{pt}, G) \cong \begin{cases} G & \text{se } k = 0 \\ \{0\} & \text{se } k > 0 \end{cases}$
- $H^k(M^n, G) \cong \{0\}$ para $k > n$
- $H^k(S^n, \mathbb{Z}) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{se } k = 0, n \\ \{0\} & \text{se } k \neq 0, n \end{cases}$ para $n \geq 1$

A cada $f : X \to Y$ associam-se homomorfismos

$$f^* : H^k(Y, G) \longrightarrow H^k(X, G) \quad , \ k \geq 0$$

tais que:

- $(f \circ g)^* = g^* \circ f^*$
- $\text{id}^* = \text{id}$

Se G é um anel, temos o produto "cup":

$$\smile : H^k(X, G) \times H^k(X, G) \longrightarrow H^{2k}(X, G)$$

Fibrados Vectoriais

Classes Características

$$\{\text{fibrados vectoriais sobre } B\} \longrightarrow H^{\sqcap}(B) \quad ???$$

Exemplos:

- Classes de Stiefel-Whitney:
  ξ fibrado vectorial real sobre B
  $w_k(\xi) \in H^k(B, \mathbb{Z}_2)$, $k \geq 0$
- Classes de Pontrjagin:
  ξ fibrado vectorial real sobre B
  $p_k(\xi) \in H^{4k}(B, \mathbb{Z})$, $k \geq 0$

Classes de Pontrjagin de uma variedade M:

$$p_k(M) \equiv p_k(TM)$$

Propriedades:

- $p_k(M^n) = 0$ para $k > \frac{n}{4}$
- $p_k(S^n) = 0$ para $k \geq 1$

Assinatura de uma variedade

$M \equiv$ variedade compacta, conexa e orientada de dimensão $4k$

O produto "cup" é uma função bilinear simétrica:

$$\smile : H^{2k}(M,\mathbb{R}) \times H^{2k}(M,\mathbb{R}) \longrightarrow H^{4k}(M,\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}$$

$Q : H^{2k}(M,\mathbb{R}) \longrightarrow H^{4k}(M,\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}$ dada por

$$Q(x) = x \smile x$$

é uma forma quadrática.

<u>Assinatura de M</u>:

$$\sigma(M) \equiv \text{assinatura da forma quadrática } Q$$

Fórmula de Hirzebruch

Relaciona a assinatura de M^{4k} (compacta, conexa e orientada) com as suas classes de Pontrjagin:

$$k = 1 \qquad \sigma\left(M^4\right) = \frac{1}{3}\, p_1\big(M^4\big)$$

$$k = 2 \qquad \sigma\left(M^8\right) = \frac{1}{45}\left(7p_2\big(M^8\big) - \big(p_1\big(M^8\big)\big)^2\right)$$

Exemplo de Milnor