Geometria Diferencial – Outono de 2002
Ficha 1 - Resolução

1. Seja X um espaço topológico localmente Euclideano. Se $x \in X$ e $\phi : U \to \mathbb{R}^d$ é um sistema de coordenadas com $x \in U$, chama-se **dimensão de X em x** ao número d. Mostre que:

   (a) A dimensão de X em x está bem definida, i.e., não depende do sistema de coordenadas utilizado;

   (b) Todos os pontos da mesma componente conexa de X têm a mesma dimensão;

   Resolução:

   (a) Sejam $\phi : U \to \mathbb{R}^d$ e $\psi : V \to \mathbb{R}^e$ dois sistemas de coordenadas com $x \in U \cap V$. Então $\phi \circ \psi^{-1}$ é um homeomorfismo de um aberto de $\mathbb{R}^d$ num aberto de $\mathbb{R}^e$. Pelo teorema da invariância do domínio, temos necessariamente $d = e$.

   (b) Sejam X_d o conjunto dos pontos de X em que a dimensão é d. Os conjuntos X_d são abertos, disjuntos dois a dois e $X = \cup_{d \in \mathbb{N}} X_d$. Se X é conexo, então $X_d \neq \emptyset$ apenas para um inteiro d.

2. Mostre que:

   (a) Toda a cobertura aberta de uma variedade M possui um refinamento aberto, contável, localmente finito e com fecho compacto.

   (b) Toda a cobertura aberta de uma variedade M possui uma subcobertura contável.

   Resolução:

   (a) Ver Warner, Lema 1.9.

   (b) Uma variedade M satisfaz o segundo axioma, e portanto possui uma base contável de abertos $\{O_1, O_2, \dots\}$. Se $\{U_\alpha : \alpha \in A\}$ é uma cobertura aberta de M, então escolhemos para cada O_k um aberto U_{α_k} que o contenha (caso exista). Os abertos $\{U_{\alpha_1}, U_{\alpha_2}, \dots\}$ são uma subcobertura contável.

3. Mostre que existe uma função $\phi \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$ tal que $0 \leq \phi(x) \leq 1$ para todo o $x \in \mathbb{R}^d$ e

$$\phi(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } |x| \leq 1 \\ \\ 0 & \text{se } |x| > 2 \end{cases}$$

Resolução: Note que basta construir uma função $g \in C^\infty(\mathbb{R})$, com $0 \leq g(r) \leq 1$, e tal que $g(r) = 1$ se $r < 1$ e $g(r) = 0$ se $r > 2$. De facto, se g é uma tal função então obtemos a função procurada se definirmos

$$\phi(x^1, \ldots, x^d) = g(\sqrt{(x^1)^2 + \cdots + (x^d)^2}).$$

Para obter ϕ tomamos a função "lomba"

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{(x-a)^2}} e^{-\frac{1}{(x-b)^2}}, & \text{se } a \leq x \leq b, \\ \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Note que $f \in C^\infty(\mathbb{R})$, satisfaz $f(x) > 0$ se $a \leq x \leq b$, e $f(x) = 0$ caso contrário. Tomamos $a = 1$ e $b = 2$, e definimos

$$g(x) = \frac{\int_x^{+\infty} f(x)dx}{\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx}.$$

4. Seja $M(n, r)$ o conjunto da matrizes $n \times r$ com rank r. Construa uma estrutura de variedade diferenciável em $M(n, r)$.

Resolução: Podemos identificar $M(n, r)$ com as aplicações lineares injectivas $\phi : \mathbb{R}^r \to \mathbb{R}^n$: se ϕ é uma tal aplicação, tomando uma base $\{e_1, \ldots, e_r\}$ para $\mathbb{R}^r$, a matriz cujas linhas são os vectores $\phi(e_k)$ tem rank r. Esta correspondência é bijectiva com o conjunto das matrizes de rank r em $M(n, r)$. Basta agora obervar que este conjunto é um conjunto aberto de $\mathbb{R}^{nr}$.

5. O **espaço projectivo** d-dimensional é o conjunto

$$\mathbb{P}^d = \left\{ L \subset \mathbb{R}^{d+1} : L \text{ é uma recta pela origem} \right\}.$$

Podemos identificar $\mathbb{P}^d$ com o quociente $\mathbb{R}^{d+1} - \{0\} / \sim$ onde $\sim$ é a relação de equivalência:

$$(x^0, \ldots, x^d) \sim (y^0, \ldots, y^d) \text{ iff } (x^0, \ldots, x^d) = \lambda(y^0, \ldots, y^d),$$

para algum número real $\lambda \in \mathbb{R}$ com $\lambda \neq 0$.

(a) Verifique que o espaço $\mathbb{P}^d$, com a topologia quociente, é um espaço localmente euclideano de dimensão d.

SUGESTÃO: Designando por $[x^0, \ldots, x^d]$ a classe de equivalência de $(x^0, \ldots, x^d) \in \mathbb{R}^{d+1}$, para cada $i = 0, \ldots, n$ verifique que temos um sistema de coordenadas (U_i, ϕ_i) onde:

$$U_i = \left\{[x^0, x^1, \ldots, x^d] : x^i \neq 0\right\},$$
$$\phi_i : U_i \to \mathbb{R}^d, \quad [x^0, x^1, \ldots, x^d] \mapsto (\frac{x^0}{x^i}, \ldots, \frac{\check{x}^i}{x^i}, \ldots, \frac{x^d}{x^i})$$

(o sinal $\check{a}$ significa que omitimos o termo a).

(b) Verifique que as funções de transição para estes sistemas de coordenada são C^∞. A estrutura diferenciável standard no espaço projectivo obtém-se considerando a colecção de coordenadas maximal que contém estes dois sistemas de coordenadas.

RESOLUÇÃO:

(a) A aplicação ϕ_i é uma bijecção de U_i em $\mathbb{R}^d$. De facto, verifica-se imediatamente que tem inversa:

$$\phi_i^{-1}(y^1, \ldots, y^d) = [y^1, \ldots, y^i, 1, y^{i+1}, \ldots, y^d].$$

Para a topologia quociente em $\mathbb{P}^d$, as aplicações ϕ_i e ϕ_i^{-1} são contínuas. Logo $\mathbb{P}^d$ é um espaço localmente euclideano de dimensão d. A topologia quociente é Hausdorff e possui uma base contável.

(b) Um cálculo simples mostra que a função de transição $\phi_i \circ \phi_j^{-1}$ é a aplicação $\mathbb{R}^d - \{y^i = 0\} \to \mathbb{R}^d - \{y^j = 0\}$ dada por:

$$(y^1, \ldots, y^d) \mapsto (\frac{y^1}{y^i}, \ldots, \frac{y^{i-1}}{y^i}, \frac{y^{i+1}}{y^i}, \ldots, \frac{y^j}{y^i}, \frac{1}{y^i}, \frac{y^{j+1}}{y^i}, \ldots, \frac{y^d}{y^i}).$$

Esta aplicação é C^∞.