Geometria Diferencial – Outono de 2003

Ficha 2

Entregar na Aula de 14 de Outubro de 2003

1. Uma subvariedade (N, Φ) de M diz-se própria se $\Phi : N \to M$ é uma aplicação própria. Mostre que (N, Φ) é uma subvariedade própria sse N é mergulhada e $\Phi(N)$ é fechado em M.

2. Seja $\Psi : M \to N$ uma aplicação diferenciável, transversal a uma subvariedade $Q \subset N$ (não necessariamente mergulhada). Mostre que $\Psi^{-1}(Q)$ é uma subvariedade de M (não necessariamente mergulhada) e que

$$T_p\Psi^{-1}(Q) = \left\{ \mathbf{v} \in T_pM : \mathrm{d}_p\Psi \cdot \mathbf{v} \in T_{\Psi(p)}Q \right\}.$$

3. Mostre a seguinte versão fraca do **Teorema de Sard**: Seja $\Psi : M \to N$ uma aplicação diferenciável entre variedades da mesma dimensão. O conjunto dos valores críticos de Ψ tem medida nula.

4. Mostre que as folhas de uma folheação são subvariedades iniciais.

5. Seja $\mathcal{F}$ a folheação de Reeb de $D^2 \times S^1$, e $\Phi : D^2 \times S^1 \to N$ uma aplicação diferenciável constante em cada folha de $\mathcal{F}$. Mostre que Φ é constante.

6. Para uma folheação $\mathcal{F}$ de M, designa-se por $M/\mathcal{F}$ o espaço das folhas com a topologia quociente. Para cada um dos seguintes exemplos, descreva explicitamente o espaço das folhas.

   (a) A folheação de $\mathbb{R}^2$ por rectas de inclinação a.

   (b) A folheação de $\mathbb{R}^2 - \{0\}$ por rectas horizontais.

   (c) A folheação racional do toro $\mathbb{T}^2$.

   (d) A folheação irracional do toro $\mathbb{T}^2$.

   (Nota: O espaço da folhas é, frequentemente, bastante pobre. Uma boa parte da teoria da folheações é dedicada a encontrar melhor modelos para $M/\mathcal{F}$.)