Geometria Diferencial – Outono de 2002
Ficha 2 - Resolução

1. Considere em $\mathbb{R}^3$ as coordenadas cartesianas usuais (x, y, z). As coordenadas esféricas (U, ϕ) onde $U = \mathbb{R}^3 - \{(x, 0, z) : x \geq 0\}$ e $\phi = (r, \theta, \varphi)$, são definidas como é usual por:

   - $r(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$;
   - $\theta(x, y, z)$ é o ângulo em $]0, 2\pi[$ definido por

   $$\theta = \begin{cases} \arctan(\frac{y}{x}) \text{ se } x > 0,\ y > 0, \\ \pi + \arctan(\frac{y}{x}) \text{ se } x < 0, \\ 2\pi + \arctan(\frac{y}{x}) \text{ se } x > 0,\ y < 0, \\ \pi/2 \text{ se } x = 0,\ y > 0, \\ 3\pi/2 \text{ se } x = 0,\ y < 0. \end{cases}$$

   - $\varphi(x, y, z)$ é o único ângulo em $]0, \pi[$ tal que $\cos\varphi = r/z$ se $z \neq 0$ e $\varphi(x, y, 0) = \pi/2$.

   Calcule:

   (a) As componentes do vectores tangentes a $\mathbb{R}^3$ $\frac{\partial}{\partial r}$, $\frac{\partial}{\partial \theta}$, $\frac{\partial}{\partial \varphi}$ em coordenadas cartesianas;

   (b) As componentes do vectores tangentes a $\mathbb{R}^3$ $\frac{\partial}{\partial x}$, $\frac{\partial}{\partial y}$, $\frac{\partial}{\partial z}$ em coordenadas esféricas.

   Resolução: Recordemos que se $\mathbf{v} \in T_pM$ é um vector tangente, $(x^1, \ldots, x^d)$ e $(y^1, \ldots, y^d)$ são sistemas de coordenadas em p, então podemos escrever:

   $$\mathbf{v} = \sum_{i=1}^{d} a^i \frac{\partial}{\partial x^i} = \sum_{j=1}^{d} b^j \frac{\partial}{\partial y^j},$$

   onde as componentes estão relacionadas por:

   $$a^i = \sum_{j=1}^{d} \frac{\partial x^i}{\partial y^j} b^j.$$

   Por exemplo, temos que:

   $$\frac{\partial}{\partial r} = \frac{\partial x}{\partial r}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial r}\frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial r}\frac{\partial}{\partial z} = \frac{x}{r}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{y}{r}\frac{\partial}{\partial y} + \frac{z}{r}\frac{\partial}{\partial z}.$$

Uma forma mais sistemática de apresentar os cálculos é observar que as componentes de $\frac{\partial}{\partial r}$, $\frac{\partial}{\partial \theta}$ e $\frac{\partial}{\partial \varphi}$, são as entradas da 1ª, da 2ª e da 3ª colunas, respectivamente, da matriz jaconiana:

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial \varphi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta \operatorname{sen}\varphi & -r \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\varphi & r\cos\theta\cos\varphi \\ \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\varphi & r\cos\theta \operatorname{sen}\varphi & r \operatorname{sen}\theta\cos\varphi \\ \cos\varphi & 0 & -r \operatorname{sen}\varphi \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} & -y & \frac{xz}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} & -x & \frac{yz}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} & 0 & -\sqrt{x^2+y^2} \end{bmatrix}.$$

Por outro lado, as componentes dos vectores $\frac{\partial}{\partial x}$, $\frac{\partial}{\partial y}$, $\frac{\partial}{\partial z}$ em coordenadas esféricas, são as entradas da 1ª, da 2ª e da 3ª colunas, respectivamente, da matriz inversa:

$$J^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{\partial r}{\partial x} & \frac{\partial r}{\partial y} & \frac{\partial r}{\partial z} \\ \frac{\partial \theta}{\partial x} & \frac{\partial \theta}{\partial y} & \frac{\partial \theta}{\partial z} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x} & \frac{\partial \varphi}{\partial y} & \frac{\partial \varphi}{\partial z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta \operatorname{sen}\varphi & \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\varphi & \cos\varphi \\ -\frac{1}{r} \operatorname{sen}\theta\csc\varphi & -\frac{1}{r}\cos\theta\csc\varphi & 0 \\ \frac{1}{r}\cos\theta\cos\varphi & \frac{1}{r} \operatorname{sen}\theta\cos\varphi & -\frac{1}{r} \operatorname{sen}\varphi \end{bmatrix}.$$

2. Mostre que T^*M possui uma estrutura natural de variedade diferenciável de dimensão $2\dim M$, tal que a projeção na base é uma aplicação diferenciável.

   Resolução: Designamos por $\mathcal{C}$ a estrutura diferenciável de M e por $\pi : T^*M \to M$ a projecção canónica. Se $(U, \phi) = (U, x^1, \ldots, x^d) \in C$ é um sistema de coordenadas de M, definimos uma aplicação $\tilde{\phi} : \pi^{-1}(U) \to \mathbb{R}^{2d}$ da seguinte forma:

$$\tilde{\phi} = (x^1 \circ \pi, \ldots, x^1 \circ \pi, i_{\partial x^1}, \ldots, i_{\partial dx^d}),$$

   onde:

$$i_{\partial x^i}\omega = \omega(\frac{\partial}{\partial x^i}).$$

   Consideremos então em T^*M a topologia com base a família de conjuntos

$$\left\{\tilde{\phi}^{-1}(W) : W \subset U \text{ é aberto }, (U, \phi) \in \mathcal{C}\right\}.$$

   Como, por definição, $\pi^{-1}(U)$ é aberto para esta topologia e a aplicação $\tilde{\phi}$ é uma bijecção contínua e aberta, concluímos que T^*M é um espaço localmente euclideano. Como a topologia de M (e de $\mathbb{R}^{2d}$) é Hausdorff e possui uma base contável, o mesmo se passa com a topologia de T^*M. Finalmente, se $(U, \phi) = (U, x^1, \ldots, x^d)$ e $(V, \psi) = (V, y^1, \ldots, y^d)$ são dois sistemas de coordenadas para M, então vemos que

$$\tilde{\psi} \circ \tilde{\phi}^{-1}(x, a_1, \ldots, a_d) = (\psi \circ \phi^{-1}(x), \frac{\partial y^i}{\partial x^1} a_i, \ldots, \frac{\partial y^i}{\partial x^d} a_i),$$

onde usámos a convenção da soma de Einstein. Logo a aplicação $\tilde{\psi} \circ \tilde{\phi}^{-1}$ é C^∞ e concluímos a estrutura diferenciável maximal gerada pelos $(\pi^{-1}(U), \tilde{\phi})$ define uma estrutura de variedade em T^*M para a qual a projecção é C^∞. Esta estrura é natural pois não depende de escolhas.

3. Verifique que se M e N são variedades diferenciáveis e $\Psi : M \to N$ é uma aplicação diferenciável, então $d\Psi : TM \to TN$ é uma aplicação diferenciável.

   Resolução: Usamos a mesma notação utilizada na aula. Recordar que contruimos a estrutura diferenciável em TM utilizando os seguinte sistemas de coordenadas em TM: se $(U, \phi) = (U, x^1, \ldots, x^d)$ é um sistema de coordenadas de M, então $\tilde{\phi} : \pi^{-1}(U) \to \mathbb{R}^{2d}$ é dado pela expressão:
$$\tilde{\phi} = (x^1 \circ \pi, \ldots, x^1 \circ \pi, dx^1, \ldots, dx^d).$$

   Basta pois verificar que se $(U, \phi) = (U, x^1, \ldots, x^d)$ é um sistema de coordenadas de M e $(V, \psi) = (V, y^1, \ldots, y^d)$ é um sistema de coordenadas de N então a aplicação $\tilde{\psi} \circ d\Phi \circ \tilde{\phi}^{-1}$ é de classe C^∞. Um cálculo simples mostra que

$$\tilde{\psi} \circ d\Phi \circ \tilde{\phi}^{-1}(x, a^1, \ldots, a^d) = (\psi \circ \Phi \circ \phi(x), \frac{(\partial y^1 \circ \Phi)}{\partial x^i} a^i, \ldots, \frac{(\partial y^d \circ \Phi)}{\partial x^i} a^i),$$

   onde usámos a convenção da soma de Einstein. É claro que esta aplicação é de classe C^∞.

4. Mostre que existe um difeomorfismo $\Phi : T\mathbb{S}^3 \to \mathbb{S}^3 \times \mathbb{R}^3$ que torna o seguinte diagram comutativo:

$$\begin{tikzcd} T\mathbb{S}^3 \arrow[rr, "\Psi"] \arrow[dr, "\pi"'] & & \mathbb{S}^3 \times \mathbb{R}^3 \arrow[dl, "\tau"] \\ & \mathbb{S}^3 & \end{tikzcd}$$

   onde $\tau : \mathbb{S}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{S}^3$ é a projecção no primeiro factor.

Resolução: Observe que basta construir em $\mathbb{S}^3$ três campos vectoriais X_1, X_2 e X_3, que em cada ponto $p \in \mathbb{S}^3$ formam uma base para o espaço vectorial $T_p\mathbb{S}^3$. De facto, uma vez construídos estes campos vectoriais então podemos definir $\Phi : T\mathbb{S}^3 \to \mathbb{S}^3 \times \mathbb{R}^3$ da seguinte forma: dado $\mathbf{v} \in T_p\mathbb{S}^3$ podemos escrever $\mathbf{v} = v^1X_1(p) + v^2X_2(p) + v^2X_2(p)$, onde as componentes (v^1, v^2, v^3) são funções C^∞. Então $\Phi(\mathbf{v}) = (\pi(\mathbf{v}), v^1, v^2, v^3)$ é aplicação procurada.

Para os campos X_i podemos observar que o espaço tangente $T_{(x,y,z,w)}\mathbb{S}^3$ pode ser identificado com:

$$T_{(x,y,z,w)}\mathbb{S}^3 = \left\{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^4 : (x, y, z, z) \cdot \mathbf{v} = 0\right\}.$$

Assim, é obvio que as seguintes expressões definem campos vectoriais em $\mathbb{S}^3$

$$\begin{aligned} X_1(x, y, z, w) &= (-y, x, w, -z), \\ X_2(x, y, z, w) &= (-z, -w, x, y), \\ X_3(x, y, z, w) &= (-w, z, -y, x). \end{aligned}$$

É fácil verificar que estes campos são independentes em todos os pontos de $\mathbb{S}^3$.

Nota: Os campos X_i tem a seguinte interpretação geométrica. Identificamos $\mathbb{S}^3$ com os quarteniões de norma 1:

$$\mathbb{S}^3 = \left\{q = x + iy + jz + kw \in \mathbb{R}^4 : x^2 + y^2 + z^2 + w^2 = 1\right\}.$$

A aplicação de multiplicação por um quaternião fixo $L_q : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$:

$$L_q(p) = q \cdot p.$$

é um difeormorfismo. Como é linear, o seu diferencial $d_pL_q : T_pM \to T_{q\cdot p}M$ é dado por:

$$d_qL(\mathbf{v}) = q \cdot \mathbf{v}.$$

Se $||q|| = 1$ então L_q leva a esfera na esfera, logo fornece um difeomorfismo $L_q : \mathbb{S}^3 \to \mathbb{S}^3$. Se identificarmos $T_p\mathbb{S}^3$ com o subespaço $\{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^4 : \langle p, \mathbf{v}\rangle = 0\}$, temos outra vez que $d_pL_q : T_pM \to T_{qp}M$ é multiplicação por q.

Fixemos o ponto $p_0 = 1 = (1, 0, 0, 0)$. Uma base para o espaço tangente $T_{p_0}\mathbb{S}^3$ é dada pelos quaterniões $i = (0, 1, 0, 0)$, $j = (0, 0, 1, 0)$ e $k = (0, 0, 0, 1)$. Os campos vectoriais X_1, X_2 e X_3 são dados por:

$$X_1(p) = d_1L_p{\cdot}i = p{\cdot}i, \quad X_2(p) = d_1L_p{\cdot}j = p{\cdot}j, \quad X_3(p) = d_1L_p{\cdot}k = p{\cdot}k.$$

5. Mostre que o conjunto $\{(x,|x|) : x \in \mathbb{R}\}$ *não* é a imagem de uma imersão $\Phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$.

   Resolução: Suponha-se, por absurdo, que existia uma imersão $\Phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ com imagem $\{(x,|x|) : x \in \mathbb{R}\}$. Podemos supor que $\Phi(0) = (0,0)$. É claro que $\Phi_2(x) \geq 0$ para x numa vizinhança de 0, logo $\Phi_2'(0) = 0$. Como Φ é uma imersão, temos que $\Phi_1'(0) \neq 0$. Pelo teorema da função inversa, existe um difeomorfismo $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definido numa vizinhança da origem tal que $\Phi \circ \phi(x) = (x,|x|)$. Mas então, concluímos que a aplicação $x \mapsto |x|$ é diferenciável, o que é uma contradição.

6. Mostre que uma submersão é uma aplicação aberta. O que é que pode dizer sobre uma imersão?

   Resolução: Seja $\Phi : N \to M$ uma submersão. Pela forma canónica local para submersões, todo o ponto $p \in N$ possui uma vizinhança aberta U tal que se $V \subset U$ é um aberto então $\Phi(V)$ é aberto. Seja $\{U_i\}_{i\in I}$ uma cobertura de N por abertos com esta propriedade. Se $O \subset N$ é um aberto então a sua imagem

$$\Phi(O) = \Phi(\cup_{i\in I} O \cap U_i) = \cup_{i\in I}\Phi(O \cap U_i),$$

   é a união de abertos, logo é aberta.

7. Seja $\Phi : \mathbb{P}^2 \to \mathbb{R}^3$ a aplicação definida por

$$\Phi([x,y,z]) = \frac{1}{x^2+y^2+z^2}(yz, xz, xy).$$

   Mostre que Φ é uma aplicação diferenciável e verifique que é uma imersão excepto em exactamente 6 pontos. Esboce a imagem de Φ.

   Resolução: Observe que $\mathbb{P}^2$ é coberto pelos sistemas de coordenadas (U_1,ϕ_1), (U_2,ϕ_2) e (U_3,ϕ_3) onde

$$\begin{aligned} U_1 &= \{[x:y:z] : x \neq 0\}, \quad & \phi_1([x:y:z]) &= (y/x, z/x),\\ U_2 &= \{[x:y:z] : y \neq 0\}, \quad & \phi_2([x:y:z]) &= (x/y, z/y),\\ U_3 &= \{[x:y:z] : z \neq 0\}, \quad & \phi_3([x:y:z]) &= (x/z, y/z). \end{aligned}$$

   Nestas coordenadas obtemos:

$$\begin{aligned} \Phi\circ\phi_1^{-1}(u,v) &= \frac{1}{1+u^2+v^2}(uv, u, v),\\ \Phi\circ\phi_2^{-1}(u,v) &= \frac{1}{1+u^2+v^2}(v, uv, u),\\ \Phi\circ\phi_3^{-1}(u,v) &= \frac{1}{1+u^2+v^2}(v, u, uv), \end{aligned}$$

que são aplicações C^∞ de $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$. Assim Φ é uma aplicação C^∞. Para decidir em que pontos é que Φ é uma imersão calculamos as matrizes jacobianas destas aplicações e verificamos em que pontos tem rank 2. Assim, para a primeira aplicação temos:

$$d_{(u,v)}\Phi \circ \phi_1^{-1} = \frac{1}{(1+u^2+v^2)^2} \begin{bmatrix} v(1-u^2+v^2) & u(1+u^2-v^2) \\ 1-u^2+v^2 & -2uv \\ -2uv & 1+u^2-v^2 \end{bmatrix}.$$

Podemos calcular o determinante dos três menores 2×2 desta matriz:

$$\frac{1}{(1+u^2+v^2)^2} \det \begin{bmatrix} v(1-u^2+v^2) & u(1+u^2-v^2) \\ 1-u^2+v^2 & -2uv \end{bmatrix} = \frac{u(1-(u^2-v^2)^2)}{(1+u^2+v^2)^2}$$

$$\frac{1}{(1+u^2+v^2)^2} \det \begin{bmatrix} v(1-u^2+v^2) & u(1+u^2-v^2) \\ -2uv & 1+u^2-v^2 \end{bmatrix} = \frac{v(1-(u^2-v^2)^2)}{(1+u^2+v^2)^2}$$

$$\frac{1}{(1+u^2+v^2)^2} \det \begin{bmatrix} 1-u^2+v^2 & -2uv \\ -2uv & 1+u^2-v^2 \end{bmatrix} = \frac{1-u^2-v^2}{1+u^2+v^2}$$

Para que o rank da matriz seja inferior a dois, teremos de ter todos os determinantes 0, o que só é possível com $u = 0, v = \pm 1$ ou $u = \pm 1, v = 0$. Assim em U_1 temos que Φ é uma imersão excepto em $[\pm 1, 0, 1]$ e $[0, \pm 1, 1]$.

A análise dos outros abertos U_2 e U_3 obtém-se de forma semelhante e concluímos que Φ é uma imersão excepto nos pontos $[\pm 1, 0, \pm 1]$, $[0, \pm 1, \pm 1]$ e $[\pm 1, \pm 1, 0]$ que são exactamente seis pontos de $\mathbb{P}^2$.