Geometria Diferencial – Outono de 2002
Ficha 3 – Resolução

1. Mostre que se (N, Φ) é uma subvariedade de M, com N compacta, então é uma subvariedade mergulhada.

   Resolução: É preciso mostrar que $\Phi : N \to \Phi(N) \subset M$ é um homeomorfismo se $\Phi(N)$ possui a topologia relativa. Como Φ é continua e injectiva, falta apenas mostrar que Φ^{-1} é contínua, ou seja que Φ é aberta.

   Seja $U \subset N$ um aberto. Como N é compacta, temos que $N - U$ é compacto, logo $\Phi(N - U)$ é compacto. Assim o seu complementar é um aberto de M. Como Φ é injectiva, temos que $\Phi(U) = \Phi(N) \cap (\Phi(N - U))^c$ é um aberto relativo. Isto mostra que Φ é aberta.

2. Mostre que uma imersão bijectiva $\Phi : N \to M$ é um difeomorfismo. Se N não possui uma base contável mostre que isto pode ser falso.

   Resolução: Se Φ é uma imersão então $\dim N \geq \dim M$.

   Se $\dim N = \dim M$ então Φ é uma étale, logo é um difeomorfismo local. Como Φ é bijectiva, segue-se que Φ é um difeomorfismo.

   Resta pois mostrar que não podemos ter $\dim N > \dim M$. Suponha-se por absurdo que ser verificava esta desigualdade. Seja então (U, ϕ) um sistema de coordenadas para M tal que $\phi(U) = \mathbb{R}^d$, onde $d = \dim M$. A aplicação $\phi \circ \Phi$ tem então imagem $\mathbb{R}^d$. Por outro lado, como Φ é uma imersão, para cada $p \in N$ existe um aberto U_p tal que $\phi \circ \Phi(U_p)$ é um conjunto denso em nenhuma parte. Como N possui uma base contável, podemo cobrir N por um número contável $U_1, \ldots, U_i, \ldots$ de abertos deste tipo. Concluímos que

   $$\mathbb{R}^d = \bigcup_i \phi \circ \Phi(U_i),$$

   é uma união contável de conjuntos densos em nenhuma parte. Isto contradiz o Teorema da Categoria de Baire.

   Se N não possui uma base contável então o resultado é falso. Se tomarmos $N = \cap_{y \in \mathbb{R}} \{(x, y) : x \in \mathbb{R}\}$ (a união das rectas horizontais no plano), então N é uma 1-variedade. A inclusão em $\mathbb{R}^2 = M$, fornece uma aplicação $\Phi : N \to M$ que é uma imersão bijectiva mas não é um difeomorfismo local.

3. Seja M uma variedade, $A \subset M$ e $i : A \hookrightarrow M$ a inclusão canónica. Mostre que (A, i) é uma subvariedade de M mergulhada de dimensão d sse para cada $p \in A$ existe um sistema da coordenadas $(U, x^1, \dots, x^e)$ em p tais

$$A \cap U = \left\{p \in A : x^{d+1}(p) = \cdots = x^e(p) = 0\right\}.$$

Resolução: Ver Notas das aulas.

4. Seja $\Phi : \mathbb{P}^2 \to \mathbb{R}^4$ a aplicação definida por

$$\Phi([x, y, z]) = \frac{1}{x^2 + y^2 + z^2}(x^2 - z^2, yz, xz, xy).$$

Mostre que $(\mathbb{P}^2, \Phi)$ é uma subvariedade mergulhada de $\mathbb{R}^4$.

Resolução: Se $\pi : \mathbb{S}^2 \to Pp^2$ é a projecção canónica, consideremos a composição $\Phi \circ \pi : \mathbb{S}^2 \to \mathbb{R}^4$:

(a) $\Phi \circ \pi$ é uma imersão: Um cálculo simples utilizando coordenadas locais mostra que o diferencial $d(\Phi \circ \pi)$ é injectivo;

(b) A aplicação $\Phi \circ \pi$ é $2 : 1$: Se $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$ então a equação $\Phi(x, y, z) = (a, b, c, d)$, $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ é equivalente ao sistema:

$$\begin{cases} x^2 - z^2 = a, \\ yz = b, \\ xz = c, \\ xy = d, \\ x^2 + y^2 + z^1 = 1. \end{cases} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \begin{cases} x^2 - z^2 = a, \\ bx^2 = cd, \\ cy^2 = bd, \\ dz^2 = cb, \\ x^2 + y^2 + z^1 = 1. \end{cases}$$

Assim, dado (a, b, c, d) ou o sistema não tem solução ou tem as soluções $\pm(x, y, z)$;

Segue-se que $\Phi : \mathbb{P}^2 \to \mathbb{R}^4$ é uma imersão injectiva. Como $\mathbb{P}^2$ é compacto, concluímos que Φ é um mergulho.

5. Seja $O(n) = \left\{A : AA^T = I\right\}$ o conjunto das matrizes $n \times n$ ortogonais. Mostre que $O(n)$ é uma subvariedade mergulhada do espaço das matrizes $n \times n$. Verifique que o espaço tangente $T_I O(n)$, onde I designa a matriz identidade, pode ser identificado com o espaço das matrizes $n \times n$ anti-simétricas.

RESOLUÇÃO: Designe-se por $S(n)$ o conjunto das matrizes $n \times n$ simétricas. É claro que $S(n)$ é um espaço vectorial de dimensão finita, logo é uma variedade (de dimensão $\frac{n^2-n}{2}+n = \frac{n^2+n}{2}$). Seja $\Phi : M_n(\mathbb{R}) \to S(n)$ a aplicação $A \mapsto AA^T$. Esta aplicação é diferenciável e o seu diferencial é dado por:

$$d_A\Phi(X) = AX^T + XA^T.$$

Vejamos que $I \in S(n)$ é um valor regular de Φ: Para isso temos de estudar as soluções da equação:

$$d_A\Phi(X) = AX^T + XA^T = Y,$$

onde Y é uma matriz simétrica (como $S(n)$ é um espaço vectorial podemos identificar o seu espaço tangente consigo próprio). Se $A \in O(n)$ e X é solução de

$$AX^T = \frac{Y}{2} \quad \Longrightarrow X = \frac{Y^T A}{2},$$

então temos que $d_A\Phi(X) = Y$.

Como I é um valor regular, segue-se que $O(n) = \Phi^{-1}(I)$ é uma subvariedade mergulhada de codimensão $\frac{n^2+n}{2}$.

O espaço tangente a $O(n)$ na identidade pode ser identificado com o núcleo de $d_I\Phi$, ou seja:

$$T_I O(n) = \{X : X^T + X = 0\},$$

é o espaço das matrizes $n \times n$ anti-simétricas.

6. Mostre que um campo vectorial numa variedade compacta é completo.

RESOLUÇÃO: Seja M compacta e $X \in \mathfrak{X}(M)$. Suponhamos, por absurdo, que existia uma curva integral maximal $\gamma : (a, b) \to M$ tal que $b < +\infty$. Seja $b_n \to b$ uma sucessão com $b_n < b$. Como M é compacta podemos supor (passando a uma subsucessão) que existe o limite $\lim_{n\to\infty} \gamma(b_n) \equiv p$. Seja $\gamma' : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ uma curva integral X com $\gamma'(0) = p$. Então a curva

$$\tilde{\gamma}(t) = \begin{cases} \gamma(t) & \text{se } t \in (a, b), \\ \\ \gamma'(t-b) & \text{se } t \in [b, b+\varepsilon), \end{cases}$$

é uma curva integral de X que extende γ, que era suposta maximal. Assim, temos $b = +\infty$. De forma análoga mostra-se que $b = -\infty$.