Geometria Diferencial – Outono de 2002
Ficha 4 – Resolução

1. Uma estrutura Riemanniana numa variedade M é uma escolha de um produto interno $\langle\ ,\ \rangle_p$ em cada espaço tangente T_pM que varia diferenciavelmente em p (para todos os campos vectoriais $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ a função $p \mapsto \langle X(p), Y(p)\rangle_p$ é C^∞). Mostre que existe uma estrutura Riemanniana em qualquer variedade M.

   Resolução: Pelo Teorema de Whitney podemos mergulhar M nalgum $\mathbb{R}^k$. O produto interno em $\mathbb{R}^k$ induz um produto interno em cada espaço tangente T_pM, que define uma estrutura Riemanniana em M.

2. Considere a distribuição $\mathcal{D}$ em $\mathbb{R}^3$ gerada pelos campos vectoriais:
$$\frac{\partial}{\partial x} + \cos x \cos y \frac{\partial}{\partial z}, \qquad \frac{\partial}{\partial y} - \sin x \sin y \frac{\partial}{\partial z}.$$
   Verifique que $\mathcal{D}$ é uma distribuição involutiva e determine as variedades integrais maximais.

   Resolução: Designando estes campos vectoriais por X e Y, o seu parêntesis de Lie é:
$$[X, Y] = 0.$$
   Assim, se $Z_1 = f_1X + g_1Y$ e $Z_2 = f_2X + g_2Y$ são campos vectoriais ao longo da distribuição, obtemos:
$$\begin{aligned}[Z_1, Z_2] = {}& f_1X(f_2)X - f_2X(f_1) + f_1X(g_2)Y - g_2Y(f_1)X \\ & g_1Y(f_2)X - f_2X(g_1)Y + g_1Y(g_2)X - g_2Y(g_1)X.\end{aligned}$$
   que é um campo vectorial ao longo de $\mathcal{D}$. Assim $\mathcal{D}$ é involutiva.

   Para determinar as variedades integrais observe que como X e Y têm componente constante segundo $\frac{\partial}{\partial x}$ e $\frac{\partial}{\partial y}$ respectivamente, as folhas integrais são superfícies que são gráficos de funções $I : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$:
$$z = I(x, y) \quad \iff F(x, y, z) \equiv z - I(x, y) = 0.$$
   Como X e Y são campos tangentes a estas superfícies, temos que $dF \cdot X = 0$ e $dF \cdot Y = 0$. Isto fornece o sistema:
$$\begin{cases} \frac{\partial I}{\partial x} = \cos x \cos y, \\ \\ \frac{\partial}{\partial y} = -\sin x \sin y \frac{\partial}{\partial z}. \end{cases}$$

As soluções são $I(x, y) = \sin x \cos y + C$, logos as superfícies integrais são dadas por

$$z = \sin x \cos y + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

3. Chama-se **folheação** de dimensão k de uma variedade diferenciável M a uma subvariedade N de M de dimensão k tal que:

   (a) Todo o ponto $p \in M$ pertence a (uma componente conexa) de N;

   (b) Para todo o $p \in M$ existem coordenadas locais $(U, \phi) = (U, x^1, .., x^d)$ centradas em p, tais que $\phi(U) =]-1, 1[\times \cdots \times]-1, 1[$ e as componentes conexas de $U \cap N$ são as fatias:

   $$\{q \in M : x^{k+1}(q) = \text{const.}, \dots, x^d(q) = \text{const.}\}.$$

   Mostre que uma folheação N define uma distribuição integrável cujas variedades integrais são as componentes conexas de N.

   Nota Importante: Neste exercício a subvariedade N pode não satisfazer o 2^o axioma.

   Resolução: Dada uma folheação N definimos uma distribuição $\mathcal{D}$ por

   $$p \mapsto \mathcal{D}_p \equiv T_pN.$$

   Por (a), isto define de facto uma distribuição. Por (b), esta distribuição é C^∞. Por outro lado, (b) também mostra que N é uma folha integral de $\mathcal{D}$. Pelo Teorema de Frobenius, versão global, se $p \in M$ a L a componente conexa de N que contém p é a variedade integral maximal que contém p.

4. Mostre que a álgebra de Lie do grupo $GL(n)$ pode ser identificada com álgebra de Lie $\mathfrak{gl}(n)$ das matrizes $n \times n$, com o comutador de matrizes.

   Resolução: As componentes (x_{ij}) de uma matriz definem coordenadas globais em $GL(n)$. Nestas coordenadas, os campos vectoriais invariantes à esquerda de $GL(n)$ são da forma:

   $$X_A = \sum_{ijk} x_{ik} a_{kj} \frac{\partial}{\partial x_{ik}},$$

onde $A = (a_{kl})$ é uma matriz qualquer. Por outro lado, dados dois campos vectoriais desta forma X_A e X_B, calculamos

$$\begin{aligned}[X_A, X_B] &= [\sum_{ijk} x_{ik} a_{kj} \frac{\partial}{\partial x_{ik}}, \sum_{ijk} x_{ik} b_{kj} \frac{\partial}{\partial x_{ik}}] \\ &= \sum_{ijks} x_{ik}(a_{ks} b_{sj} - a_{js} b_{sk}) \frac{\partial}{\partial x_{ik}} = X_{[A,B]}.\end{aligned}$$

Assim, a aplicação que a um campo vectorial invariante à esquerda X_A associa a matriz A é um isomorfismo entre a álgebra de Lie de $GL(n)$ e a álgebra de Lie $\mathfrak{gl}(n)$.

5. Seja $\mathbb{S}^3 = \{q \in \mathbb{H} : |q| = 1\}$ o grupo dos quaterniões de comprimento 1, e $SU(2)$ o grupo unitário especial

$$SU(2) = \{X \in M_2(\mathbb{C}) : XX^\dagger = I, \det X = 1\}$$

(matrizes unitárias de determinante 1). Mostre que $\mathbb{S}^2$ e $SU(2)$ são grupos de Lie isomorfos.

Resolução: Observe que uma matriz 2×2 pertence a $SU(2)$ sse é da forma

$$\begin{pmatrix} z & w \\ \bar{w} & \bar{z} \end{pmatrix}$$

onde $z, w \in \mathbb{C}$ satisfazem $|z|^2 + |w|^2 = 1$. Assim, podemos definir uma aplicação $\Phi : \mathbb{S}^3 \to SU(2)$ por:

$$\Phi(x_0 + ix_1 + jx_2 + kx_3) = \begin{pmatrix} x_0 + ix_1 & x_2 + ix_3 \\ x_2 - ix_3 & x_0 - ix_1 \end{pmatrix}.$$

É fácil de ver que Φ é C^∞ e que satisfaz

$$\Phi(q \cdot q'^{-1}) = \Phi(q)\Phi(q')^{-1},$$

logo é um homomorfismo de grupos. Finalmente, é óbvio que Φ é uma bijecção.

6. Mostre que $SU(2)$ e $SO(3)$ são grupos de Lie com álgebras de Lie isomorfas. Será que estes grupos de Lie são isomorfos?

   Resolução: As álgebra de Lie de $SU(2)$ é:

$$\begin{aligned}\mathfrak{su}(2) &= \{A \in M_2(\mathbb{C}) : A + \bar{A}^T = 0,\ \text{tr } A = 0\}, \\ &= \{\begin{pmatrix} ia & b+ic \\ -a+ib & -ia \end{pmatrix} : a, b, c \in \mathbb{R}\}.\end{aligned}$$

   A álgebra de Lie de $SO(3)$ é $\mathfrak{so}(3)$, as matrizes anti-simétricas (ver Ficha 3). A aplicação $\phi : \mathfrak{su}(2) \to \mathfrak{so}(3)$ definida por:

$$\begin{pmatrix} ia & b+ic \\ -a+ib & -ia \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 0 & -2a & -2b \\ 2a & 0 & -2c \\ 2b & 2c & 0 \end{pmatrix}$$

   é um isomorfismo linear que preserva os parêntesis de Lie. Logo ϕ é um isomorfismo de álgebras de Lie.

   Pelo problema anterior $SU(2) \simeq \mathbb{S}^3$ é simplesmente conexo. Por outro lado, $\pi_1(SO(3)) = \mathbb{Z}_2$, logo $SO(3)$ não é simplesmente conexo. Assim, estes grupos de Lie não podem ser isomorfos ($SU(2)$ é o grupo revestimento universal de $SO(3)$).