Geometria Diferencial – Outono de 2002
Ficha 5 – Resolução

1. Seja $G \subset GL(n)$ um subgrupo de Lie com álgebra de Lie $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}(n)$. Mostre que a aplicação exponencial $\exp_G : \mathfrak{g} \to G$ é dada por:

$$\exp_G(A) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}.$$

Resolução: A inclusão canónica $i : G \hookrightarrow GL(n)$ é um homomorfismo de grupos de Lie, logo temos que

$$i_* \exp_G = \exp_{GL(n)} i_*.$$

Assim, se mostrarmos que o resultado é verdadeiro para $GL(n)$, segue-se que também para qualquer subgrupo de Lie $G \subset GL(n)$. Seja

$$\gamma_A(t) = \sum_{k=0}^{\infty} t^k \frac{A^k}{k!}.$$

O raio de convergência desta série de potências é $+\infty$, logo a série define uma aplicação $t \mapsto \gamma_A(t)$ que é C^∞, e que satisfaz:

$$\gamma_A(0) = I, \quad \gamma_A(t-s) = \gamma_A(t)\gamma_A(s)^{-1}.$$

Por outras palavras, $t \mapsto \gamma_A(t)$ é um subgrupo a 1-parâmetro de $GL(n)$, pela identidade. Como $\gamma'(0) = A$, concluímos que:

$$\exp(A) = \gamma_A(1) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}.$$

2. Mostre que a aplicação exponencial do grupo $SL(n)$ não é sobrejectiva.

Resolução: Basta considerar o caso $n = 2$. Seja $X \in \mathfrak{sl}(2)$ uma matriz na álgebra de Lie de $SL(2)$, i.e., uma matriz de traço zero:

$$X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}$$

Esta matriz tem valores próprios $\pm\lambda$ com $\lambda^2 = -\det X = a^2 + bc$. Assim, existe uma matriz S tal que:

$$X = SDS^{-1} \quad \text{com } D = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & -\lambda \end{pmatrix}.$$

Um cálculo explícito somando a série fornece

$$\exp(D) = \cos\lambda I + \frac{\sin\lambda}{\lambda} D.$$

Assim, concluímos que

$$\exp(X) = S\exp DS^{-1} = \cos\lambda I + \frac{\sin\lambda}{\lambda} X.$$

Desta expressão observamos que e^X tem o valor próprio -1 sse X tem os dois valores próprios $\pm(i + 2\pi ik)$, com $k \in \mathbb{Z}$. Isto implica que X é diagonalizável (sobre $\mathbb{C}$), e portanto e^X também é diagonalizável (também sobre $\mathbb{C}$), com valores próprios $\exp(\pm(i + 2\pi ik)$. Mas então $e^X = -I$. Assim, por exemplo, a matriz

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \in SL(2),$$

não pertence à imagem da exponencial.

3. Seja $\Psi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ a aplicação $\phi(s,t) = (\cos s, \sin s, t)$ e $\omega \in \Omega^1(\mathbb{R}^3)$ a 1-forma diferencial
$$\omega = ydx - xdy + zdz.$$
Calcule $\Psi^*\omega$ e $\Psi^*d\omega$ verifique que $\Psi^*d\omega = d\Psi^*\omega$.

Resolução:

$$\begin{aligned} \omega &= ydx - xdy + zdz, \\ d\omega &= dy \wedge dx - dx \wedge dy = -2dx \wedge dy, \\ \Psi^*\omega &= (\sin s)d\cos s - (\cos s)d\sin s + tdt \\ &= -\sin^2 sds - \cos^2 sds + tdt = -ds + tdt \\ \Psi^*d\omega &= -2d\cos s \wedge d\sin s = 0, \\ d\Psi^*\omega &= -d^2 s + dt \wedge dt = 0. \end{aligned}$$

4. Seja $\mathbb{S}^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ e $i : \mathbb{S}^2 \hookrightarrow \mathbb{R}^3$ a inclusão canónica. Considere a 2-forma diferencial $\omega \in \Omega^2(\mathbb{R}^3)$ definida por

$$\omega = xdy \wedge dz + ydz \wedge dx + zdx \wedge dy.$$

Calcule $i^*\omega \in \Omega^2(\mathbb{S}^2)$ em coordenadas esféricas (θ, φ).

RESOLUÇÃO: Em coordenadas esféricas temos:

$$i(\theta, \phi) = (\cos\theta \ \mathrm{sen}\phi,\ \mathrm{sen}\theta \ \mathrm{sen}\phi, \cos\phi).$$

Obtemos:

$$i^*\omega = -\sin\phi \ d\theta \wedge d\phi.$$

5. Sejam $\{\omega_1, \ldots, \omega_k\}$ 1-formas diferenciais numa variedade M de dimensão d, linearmente independentes em cada $p \in M$. Mostre que se $\{\theta_1, \ldots, \theta_k\}$ são 1-formas em M satisfazendo

$$\sum_{i=1}^{k} \theta_i \wedge \omega_i = 0,$$

então existem funções $a_{ij} \in C^\infty(M)$, com $a_{ij} = a_{ji}$, tais que

$$\theta_i = \sum_{j=1}^{k} a_{ij}\omega_j.$$

RESOLUÇÃO: Podemos completar o conjunto $\{\omega_1, \ldots, \omega_k\}$ com formas diferenciais $\omega_{k+1}, \ldots, \omega_d$, obtendo uma base das 1-formas diferenciais em M. Podemos pois escrever as 1-formas diferenciais θ_i nesta base:

$$\theta_i = \sum_{l=1}^{k} a_{il}\omega_l + \sum_{l=k+1}^{d} b_{il}\omega_l,$$

onde $a_{il}, b_{il} \in C^\infty(M)$. Temos então:

$$\begin{aligned}
0 &= \sum_{i=1}^{k} \theta_i \wedge \omega_i \\
&= \sum_{i=1}^{k}\sum_{l=1}^{k} a_{il}\omega_l \wedge \omega_i + \sum_{i=1}^{k}\sum_{l=k+1}^{d} b_{il}\omega_l \wedge \omega_i \\
&= \sum_{1\le i<l\le k} (a_{il} - a_{li})\omega_l \wedge \omega_i + \sum_{i=1}^{k}\sum_{l=k+1}^{d} b_{il}\omega_l \wedge \omega_i.
\end{aligned}$$

Como as formas diferenciais $\{\omega_l \wedge \omega_i\}$ com $1 \leq i < l \leq d$ formam uma base para as 2-formas diferenciais em M, concluímos que

$$a_{il} - a_{li} = 0, \qquad b_{il} = 0.$$

Logo o resultado segue-se.