

GEOMETRIA DIFERENCIAL – OUTONO DE 2003

Ficha 6

Entregar na Aula de 9 de Dezembro de 2003

1. Calcule $H^k(M)$ e $H_c^k(M)$ para as seguintes variedades:

(a) Banda de Möbius;

(b) Garrafa de Klein;

(c) $M = \mathbb{T}^d$;

(RESPOSTA: $\dim H^k(\mathbb{T}^d) = \binom{d}{k}$.)

(d) $M = \mathbb{P}^d$;

(RESPOSTA: $\dim H^{2k}(\mathbb{P}^d) = 1$ se $2k \leq d$, e 0 caso contrário.)

2. Seja M uma variedade conexa, de dimensão d , não orientável. Mostre que $H_c^d(M) = 0$.

3. Sejam M_1, M_2, \dots , variedades de tipo finito de dimensão d , e considere a união disjunta dos M_i :

$$M = \bigcup_{i=1}^{+\infty} M_i.$$

Mostre que:

(a) A cohomologia de M é o produto directo:

$$H^k(M) = \prod_{i=1}^{+\infty} H^k(M_i);$$

(b) A cohomologia de M com suporte compacto é a soma directa:

$$H_c^k(M) = \bigoplus_{i=1}^{+\infty} H_c^k(M_i);$$

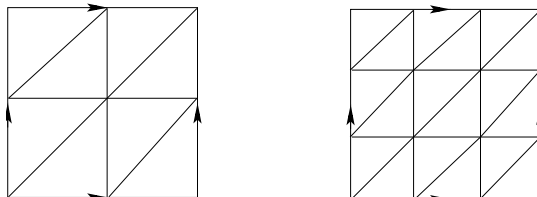
Conclua que existe um isomorfismo:

$$H^k(M) \simeq (H_c^{d-k}(M))^*,$$

mas que $H_c^{d-k}(M)$ não é isomorfa $H^k(M)^*$.

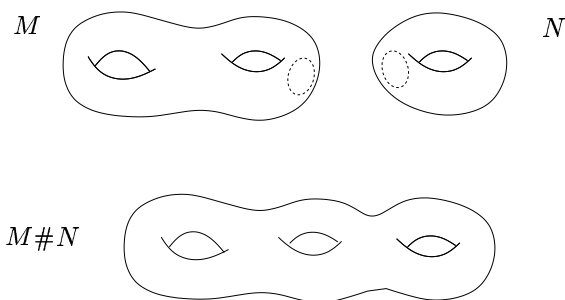
(VSFF)

4. Considere as seguintes subdivisões do quadrado $[0, 1] \times [0, 1]$:



- (a) Verifique que apenas uma destas subdivisões induz uma triangulação do toro \mathbb{T}^2 ;
 (b) Calcule r_0 , r_1 e r_2 para essa triangulação.

5. Sejam M e N variedades conexas de dimensão d . Seja $M\#N$ a soma conexa de M e N , i.e., a variedade obtida por colagem de M com N ao longo de abertos difeomorfos à bola $\{x \in \mathbb{R}^d : \|x\| < 1\}$:



Calcule a característica de Euler de $M\#N$ em termos das características de Euler de M e de N .

6. Seja $\Phi : \mathbb{S}^d \rightarrow \mathbb{T}^d$ uma aplicação diferenciável. Mostre que $\deg \Phi = 0$.