# Geometria Diferencial – Outono de 2002
## Ficha 6 – Resolução

1. Seja $\omega \in \Omega^d_c(\mathbb{R}^d)$ uma forma diferencial com suporte compacto tal que

$$\int_{\mathbb{R}^d} \omega \neq 0.$$

   (a) Seja $\omega' \in \Omega^d_c(\mathbb{R}^d)$ e defina o número real $c \equiv \int_{\mathbb{R}^d} \omega' / \int_{\mathbb{R}^d} \omega$. Mostre que $\omega' - c\omega = d\eta$, para alguma forma $\eta \in \Omega^{d-1}(\mathbb{R}^d)$;

   (b) Mostre que a forma $\eta$ pode ser tomada com suporte compacto;

   (c) Conclua que $H^d_c(\mathbb{R}^d) = \mathbb{R}$.

   Resolução: (a) Como $\omega' - c\omega$ é um forma de grau igual à dimensão da variedade temos que $d(\omega' - c\omega) = 0$. Pelo Lema de Poincaré, concluímos que $\omega' - c\omega = d\eta$, para alguma forma $\eta \in \Omega^{d-1}(\mathbb{R}^d)$.

   (b) Como $\omega' - c\omega$ tem suporte compacto, existe uma bola $B_R(0)$ tal que $\operatorname{supp}(\omega' - c\omega) \subset \operatorname{Int} B_R(0)$. Consideremos a restrição de $\eta$ ao complementar desta bola é uma $(d-1)$-forma fechada. A $(d-1)$-esfera $S_R = \partial B_R(0)$ é uma deformação por retração do complementar $(\operatorname{Int} B_R(0))^c$. A classe de cohomologia da restrição de $\eta$ à esfera $S_R$ é trivial pois pelo Teorema de Stokes temos (recorde a definição de $c$):

$$\begin{aligned}\int_{S_r} \eta &= \int_{\partial B_R(0)} \eta, \\ &= \int_{B_R(0)} d\eta, \\ &= \int_{B_R(0)} (\omega' - c\omega) = 0.\end{aligned}$$

   Concluímos que a classe de cohomologia $[\eta] \in H^{d-1}((\operatorname{Int} B_R(0))^c)$ é trivial, logo existe uma $d-2$-forma $\theta$ em $(\operatorname{Int} B_R(0))^c$ tal que $d\theta = \eta$.

   Seja $R' > R$. Existe uma função $\phi : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$, de classe $C^\infty$, tal que $\phi = 1$ em $(\operatorname{Int} B'_R(0))^c$ e $\phi = 0$ em $B_R(0)$. A forma $\eta' = \eta - d(\phi\theta)$ tem suporte compacto e $d\eta' = \omega' - c\omega$.

   (c) Por (a) e (b) se tomarmos uma $d$-forma diferencial $\omega$ em $\mathbb{R}^d$, com suporte compacto, tal que $\int_{\mathbb{R}^d} \omega \neq 0$ a classe $[\omega] \in H^d_c(\mathbb{R}^d)$ é um elemento gerador.

2. Seja $M$ uma variedade orientável conexa. O objectivo deste exercício é mostrar que $H_c^d(M) = \mathbb{R}$, onde $d = \dim M$. Para isso mostra-se que se $\omega \in \Omega_c^d(M)$ é tal que $\int_M \omega \neq 0$, então $[\omega] \in H_c^d(M)$ é gerador.

   (a) Mostre que existe uma forma diferencial com suporte compacto $\omega \in \Omega_c^d(M)$ tal que $\int_M \omega \neq 0$;

   (b) Mostre que podemos encontrar $\omega$ como em (a) e em que supp $\omega \subset U$, onde $U$ é difeomorfo a $\mathbb{R}^n$;

   Seja agora $\omega' \in \Omega_c^d(M)$. Vamos então mostrar que existem $c \in \mathbb{R}$ e $\eta \in \Omega_c^d(M)$ tais que $\omega' - c\omega = d\eta$.

   (c) Mostre que podemos assumir supp $\omega' \subset V$, onde $V$ é difeomorfo a $\mathbb{R}^n$;

   (d) Verifique que existem sempre abertos $W_1, \ldots, W_n$ difeomorfos a $\mathbb{R}^n$ tais que $W_1 = U$, $W_n = V$ e $W_i \cap W_{i+1} \neq \emptyset$;

   (e) Sejam $\omega_i \in \Omega_c^d(M)$ formas diferenciais com supp $\omega_i \subset W_i \cap W_{i+1}$ e $\int_{W_i} \omega_i \neq 0$. Mostre que existem formas $\eta_i \in \Omega_c^d(M)$ tais que

   $$\omega_1 - c_1\omega = d\eta_1, \quad \omega_2 - c_2\omega_1 = d\eta_2, \ \ldots \ , \omega' - c_r\omega_{r-1} = d\eta_r;$$

   (f) Conclua que existem $c \in \mathbb{R}$ e $\eta \in \Omega_c^d(M)$ tal que $\omega' - c\omega = d\eta$.

   Resolução: (a) Basta tomarmos um sistema de coordenadas $(U, \phi)$, e um forma diferencial $\tilde{\omega} \in \mathbb{R}^d$, tal que supp $\tilde{\omega} \subset \phi(U)$ e $\int_{\mathbb{R}^d} \tilde{\omega} \neq 0$. Extendendo o pullback $\phi^*\tilde{\omega}$ a todo o $M$ como sendo 0, obtemos a forma diferencial $\omega$ procurada. Para ver que a forma $\tilde{\omega}$ existe, basta tomar uma "bump function" $f \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$, que satisfaz $f \geq 0$, supp $f \subset \phi(U)$, $\int_{\mathbb{R}}^d f \neq 0$, e definir

   $$\tilde{\omega} = f \ dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^d.$$

   (b) A construção dada em (a) mostra que tal é possível.

   (c) Tomando uma partição da unidade $\{\phi_j\}$ subordinada a uma cobertura finita $\{V_1, \ldots, V_s\}$ de supp $\omega'$, com cada $V_j$ difeomorfo a $\mathbb{R}^d$, vemos que se o resultado é verdadeiro para $\phi_j\omega'$ então também é verdadeiro para $\omega'$: como em cada $V_j$ temos que $\phi_j\omega' - c_j\omega = d\eta_j$ concluímos que

   $$\omega' - (\sum_j c_j)\omega = \sum_j (\phi_j\omega' - c_j\omega) = d(\sum_j \eta_j).$$

   Assim basta mostrar o resultado para uma forma $\omega'$ com supp $\omega' \subset V$, onde $V$ é difeomorfo a $\mathbb{R}^d$.

(d) Os abertos $W \subset M$ difeomorfos a $\mathbb{R}^d$ formam uma cobertura aberta de $M$. Se $x \in V$ e $y \in U$, como $M$ é conexa por arcos, existe um caminho $\gamma : [0,1] \to M$ tal que $\gamma(0) = x$ e $\gamma(1) = y$. Como $\gamma([0,1])$ é compacto, um número finito de abertos $\{W_1', \ldots, W_N'\}$ cobre $\gamma([0,1])$. Seja $W_1 = V$, que contém $x$. Se $U \cap W_1 \neq \emptyset$ basta tomar $W_2 = U$, e (d) segue-se com $n = 2$. Suponhamos que construímos abertos $W_1, \ldots, W_j$, com $W_i \cap W_{i+1} \neq \emptyset$ e $W_i$, para $i > 1$, um aberto na colecção dos $W'$'s. Se $U \cap W_j \neq \emptyset$ então tomamos $W_{j+1} = U$ e (d) segue-se com $n = j+1$. Caso contrário existe um aberto $W'$ na colecção, distinto de $W_1, \ldots, W_j$, tal que $W_j \cap W' \neq \emptyset$ e tomamos $W_{j+1} = W'$. Como a colecção dos $W'$'s é finita este processo termina. Logo (d) é verdadeira.

(e) Segue-se do Problema 1.

(f) Como vimos acima, podemos encontrar formas diferenciais $\omega_i \in \Omega_c^d(M)$ formas diferenciais com supp $\omega_i \subset W_i \cap W_{i+1}$ e $\int_{W_i} \omega_i \neq 0$. De (e) segue-se que existem formas $\eta_i \in \Omega_c^d(M)$ tais que

$$\omega_1 - c_1\omega = d\eta_1, \quad \omega_2 - c_2\omega_1 = d\eta_2, \ \ldots \ , \omega' - c_n\omega_{n-1} = d\eta_n;$$

Logo:

$$\omega' - (\Pi_i c_i)\omega = d\eta,$$

para uma forma $\eta \in \Omega_c^d(M)$.

3. Calcule $H^\bullet(T^2)$ onde $T^2 = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ é o 2-toro.

RESOLUÇÃO: O 2-toro é uma 2-variedade compacta, orientável, conexa. Logo:

$$H^0(T^2) = \mathbb{R}, \qquad H^2(T^2) = \mathbb{R}.$$

Falta pois calcular $H^1(T^2)$. Para isso, é óbvio que podemos escolher dois abertos $U, V \subset T^2$ que cobrem o toro, e tais que:

(a) $U$ e $V$ são ambos difeomorfos a uma coroa $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : r < x^2 + y^2 < R\}$;

(b) $U \cap V$ é difeomorfo à união disjunta de duas coroas.

Como uma coroa pode ser retraída por deformação numa circunferência, temos:

$$H^0(U) = H^1(U) = H^0(V) = H^1(V) = \mathbb{R}, \qquad H^2(U) = H^2(V) = 0.$$

$$H^0(U \cap V) = H^1(U \cap V) = \mathbb{R}^2, \qquad H^2(U \cap V) = 0.$$

A sequência de Mayer-Vietoris para o par $(U, V)$ fornece então

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & H^0(T^2) & \longrightarrow & H^0(U) \oplus H^0(V) & \longrightarrow & H^0(U \cap V) \\ & & & \swarrow & & & \\ & & H^1(T^2) & \longrightarrow & H^1(U) \oplus H^1(V) & \longrightarrow & H^1(U \cap V) \\ & & & \swarrow & & & \\ & & H^2(T^2) & \longrightarrow & 0 & & \end{array},$$

ou seja:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \oplus \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & & & \swarrow & & & \\ & & H^1(T^2) & \longrightarrow & \mathbb{R} \oplus \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & & & \swarrow & & & \\ & & \mathbb{R} & \longrightarrow & 0 & & \end{array}$$

Desta sequência exacta concluímos que $H^1(T^2) = \mathbb{R}^2$.

4. Seja $E$ uma variedade compacta conexa. Mostre que uma aplicação diferenciável $\pi : E \to M$ é um fibrado se e só se $\pi$ é uma submersão sobrejectiva.

   Resolução: Se $\pi : E \to M$ é um fibrado então é localmente trivial, i.e., para cada $x \in M$ existe um aberto $x \in U \subset M$ e um difeomorfismo $\phi : \pi^{-1}(U) \to U \times F$ tal que o diagrama seguinte comuta:

$$\begin{array}{ccc} \pi^{-1}(U) & \xrightarrow{\phi} & U \times F \\ & {\scriptstyle \pi} \searrow \quad \swarrow & \\ & U & \end{array}$$

   Como a projecção canónica $U \times F \to U$ é uma submersão sobrejectiva, segue-se que $\pi$ é uma submersão sobrejectiva.

   Na outra direcção, é preciso mostrar que a aplicação é localmente trivial. Fixe-se $x \in M$. Pela forma canónica local para submersões, para cada $u \in E$ com $\pi(u) = x$,existem vizinhanças $V_u$ de $u$ e $U_u$ de $x$ tal que $V_u \simeq U_x \times (F_x \cap V_u)$. A família $\{V_u : u \in \pi^{-1}(x)\}$ cobre $F_x$ logo, como $F_x$ é compacto, um número finito $V_{u_1}, \ldots, V_{u_r}$ também cobrem $F_x$. Seja $U = \cap_{i=1}^r U_{u_i}$. Então $\pi^{-1}(U) \simeq U \times F$.

5. Considere uma sequência exacta curta de fibrados vectoriais sobre a mesma base:

$$0 \longrightarrow E_1 \xrightarrow{i} E_2 \xrightarrow{\pi} E_3 \longrightarrow 0.$$

Mostre que esta sequência factoriza-se, i.e., existe um homomorfismo de fibrados vectoriais $\phi : E_3 \to E_2$ tais que $\pi \circ \phi(u) = u$.

RESOLUÇÃO: Como $i$ é injectiva, podemos identificar $E_1$ com a sua imagem em $E_2$. Seja $\langle\ ,\ \rangle$ uma estrutura Riemanniana em $E_2$. Definimos um subfibrado $F \subset E_2$ por:

$$F_x = (E_1)_x^{\perp}.$$

Como $\operatorname{Ker}\pi = \operatorname{Im} i$ e $\pi$ é sobrejectivo, a restrição de $\pi$ a $F$ é um isomorfismo, e portanto existe $\phi = \pi^{-1} : E_3 \to F \subset E_2$. Esta aplicação é um homomorfismo de fibrados que factoriza a sequência exacta curta.

6. Mostre que o fibrado tangente a $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^2$ é trivial determinando uma trivialização explícita.

RESOLUÇÃO: Seja $\mathbb{S}^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ e identifiquemos $\mathbb{S}^1 \simeq \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$, com coordenada $\theta$. Se $(x, y, z) \in \mathbb{S}^2$ o vector $\vec{n} = x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y} + z\frac{\partial}{\partial z}$ é uma normal unitária à esfera, logo para qualquer vector $\vec{v} = v_1\frac{\partial}{\partial x} + v_2\frac{\partial}{\partial y} + v_3\frac{\partial}{\partial z} \in \mathbb{R}^3$ temos que $\vec{v} - (\vec{v} \cdot \vec{n})\vec{n}$ é um vector tangente à esfera. Assim, podemos definir uma aplicação do fibrado trivial $(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^2) \times \mathbb{R}^3$ no fibrado tangente $T(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^2)$ por

$$((\theta, (x, y, z)), \vec{v}) \mapsto (v_1 x + v_2 y + v_3 z)\frac{\partial}{\partial \theta} + \vec{v} - (\vec{v} \cdot \vec{n})\vec{n}.$$

Esta aplicação de fibrados é injectiva em cada fibra pois $\vec{v} - (\vec{v} \cdot \vec{n})\vec{n} = 0$ sse $\vec{v} = \lambda(x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y} + z\frac{\partial}{\partial z})$ para algum número real $\lambda$. Logo, se adicionalmente $v_1 x + v_2 y + v_3 z = 0$, então $\vec{v} = 0$. Como os fibrados têm a mesma dimensão temos de facto um isomorfismo de fibrados.