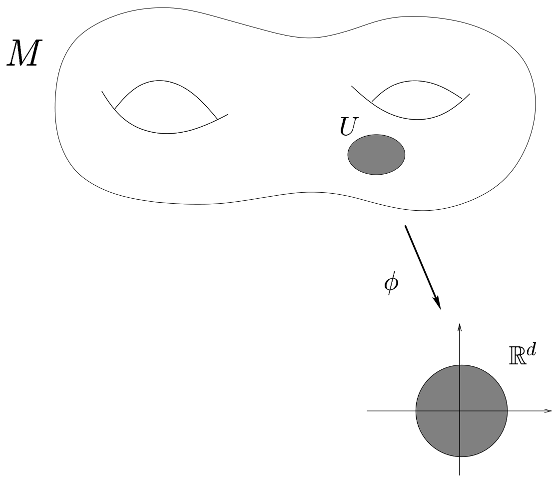
PARTE I. Fundamentos de Variedades Diferenciáveis

A noção de variedade diferenciável formaliza o conceito de um espaço que localmente é como um espaço euclidiano, quer do ponto de vista topológico, quer do ponto de vista da sua estrutura diferenciável. Esta noção é uma abstracção das noções usuais de curva e superfície em $\mathbb{R}^n$. A geometria diferencial ocupa-se do estudo das variedades diferenciáveis. Veremos que, por um lado, muitas das construções da análise infinitesimal (i.e., do cálculo) podem ser extendidas do espaço euclidiano a qualquer variedade. Por outro lado, a análise global em variedades requer técnicas e métodos novos, e mesmo as questões mais elementares resultam muitas vezes em problemas em aberto.

Nesta primeira série de lições pretendemos introduzir alguns conceitos elementares, que estão na base da geometria diferencial, e que nos ajudarão a ficar familiarizados com a noção de variedade. Os conceitos e ideias principais a reter são:

- Na Lição 1: *espaço localmente euclidiano* e *variedade diferenciável* (os nossos objectos). *Aplicação diferenciável* (os nosso morfismos). *Partição da unidade* (uma técnica de "colagem").
- Na Lição 2: *vector tangente*, *espaço tangente* (os objectos infinitesimais) e *diferencial* (os morfismos infinitesimais).
- Na Lição 3: classes importantes de aplicações diferenciáveis: *imersões*, *submersões* e *difeomorfismos locais*. *Subvariedades* (os sub-objectos).
- Na Lição 4: variedades *mergulhadas*. O *Teorema de Whitney*, que mostra que toda a variedade é mergulhada nalgum $\mathbb{R}^n$.
- Na Lição 5: *folheações* (uma partição de uma variedade em subvariedades), generalização muito útil da noção de variedade.
- Na Lição 6: *quocientes* de variedades.

Recordemos que $\mathbb{R}^d = \left\{(x^1, \ldots, x^d) : x^1, \ldots, x^d \in \mathbb{R}\right\}$ designa o espaço euclidiano de dimensão d. Vamos adoptar a convenção de designar também por $x^i : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ a função coordenada i. Um **espaço localmente euclidiano** de dimensão d é um espaço topológico M em que cada ponto $p \in M$ possui uma vizinhança $U \subset M$ homeomorfa a um aberto de $\mathbb{R}^d$.



Ao homeomorfismo $\phi : U \to \mathbb{R}^d$ chamamos um **sistema de coordenadas** ou **carta**, às funções $\phi^i = x^i \circ \phi$ chamamos **funções coordenadas**, e designamos o sistema de coordenadas abreviadamente por (U, ϕ). Muitas vezes escrevemos x^i em vez de ϕ^i, e denotamos o sistema de coordenadas por $(U, x^1, \ldots, x^d)$. Um sistema de coordenadas (U, ϕ) diz-se *centrado* num ponto $p \in M$ se $\phi(p) = 0$.

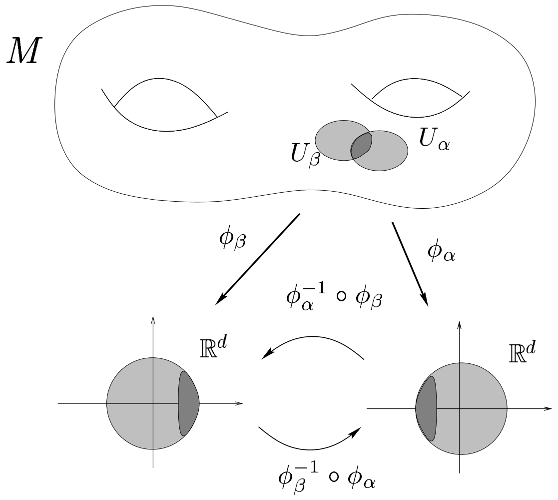
Definição 1.1. *Uma **estrutura diferenciável** de classe C^k $(1 \leq k \leq \infty)$ num espaço localmente euclidiano M de dimensão d, é uma colecção de sistemas de coordenadas $\mathcal{C} = \{(U_\alpha, \phi_\alpha) : \alpha \in A\}$ que satisfaz as seguintes propriedades:*

(i) $\{U_\alpha : \alpha \in A\}$ é uma cobertura aberta de M, i.e., $\bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha = M$;
*(ii) As **funções de transição** $\phi_\alpha \circ \phi_\beta^{-1}$ são de classe C^k para quaisquer $\alpha, \beta \in A$;*
(iii) A colecção $\mathcal{C}$ é maximal: se (U, ϕ) é um sistema de coordenadas com a propriedade de que $\phi \circ \phi_\alpha^{-1}$ e $\phi_\alpha \circ \phi^{-1}$ são de classe C^k para todo o $\alpha \in A$, então $(U, \phi) \in \mathcal{C}$.

*A um par $(M, \mathcal{C})$ chamamos uma **variedade diferenciável** de dimensão d.*

A uma colecção de sistemas de coordenadas que satisfaz (i) e (ii) chamamos um **atlas**. Para todo o atlas $\mathcal{C}_0 = \{(U_\alpha, \phi_\alpha) : \alpha \in A\}$, existe um único atlas maximal (i.e., uma estrutura diferenciável) $\mathcal{C}$ que o contém: basta tomar para $\mathcal{C}$ a colecção de todos os sistemas de coordenadas (U, ϕ) tais que $\phi \circ \phi_\alpha^{-1}$ e $\phi_\alpha \circ \phi^{-1}$ são de classe C^k.

Podemos ainda considerar *variedades analíticas*, em que as funções de transição são analíticas, ou *variedades complexas*, modeladas no espaço euclidiano $\mathbb{R}^{2d} \simeq \mathbb{C}^d$, em que as funções de transição são funções holomorfas.



Nesta notas, vamos concentrar-nos no estudo de variedades diferenciáveis de classe C^∞, que chamaremos variedades regulares, variedades suaves, ou simplesmente variedades. Vejamos alguns exemplos simples.

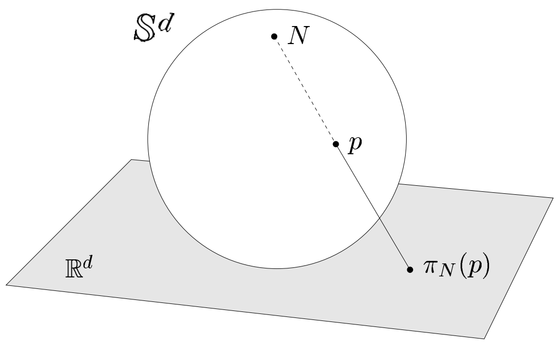
Exemplos 1.2.

1. *A estrutura diferenciável standard do* ***espaço euclidiano*** $\mathbb{R}^d$ *é a colecção de coordenadas maximal que contém o sistema de coordenadas* $(\mathbb{R}^d, i)$*, onde* $i : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ *é a aplicação identidade.*

2. *A* ***esfera*** *d-dimensional é o conjunto*

$$\mathbb{S}^d = \{x \in \mathbb{R}^{d+1} : \sum_{i=1}^{d+1} (x^i)^2 = 1\}.$$

A esfera $\mathbb{S}^d \subset \mathbb{R}^d$*, com a topologia relativa, é um espaço localmente euclidiano: se* $N = (0, \ldots, 0, 1)$ *e* $S = (0, \ldots, 0, -1)$ *designam os pólos norte e sul, então obtemos dois sistemas de coordenadas* $(\mathbb{S}^d - \{N\}, \pi_N)$ *e* $(\mathbb{S}^d - \{S\}, \pi_S)$*, onde* π_N *e* π_S *designam as projecções estereográficas por* N *e* S*.*



As funções de transição para estes sistemas de coordenadas são C^∞*. A estrutura diferenciável standard na esfera obtém-se considerando a colecção de coordenadas maximal que contém estes dois sistemas de coordenadas.*

*3. O **espaço projectivo** d-dimensional é o conjunto*

$$\mathbb{P}^d = \left\{L \subset \mathbb{R}^{d+1} : L \text{ é uma recta pela origem}\right\}.$$

Podemos identificar $\mathbb{P}^d$ com o quociente $\mathbb{R}^{d+1} - \{0\} / \sim$, onde $\sim$ é a relação de equivalência:

$$(x^0, \dots, x^d) \sim (y^0, \dots, y^d) \text{ se e só se } (x^0, \dots, x^d) = \lambda(y^0, \dots, y^d),$$

para algum número real $\lambda \in \mathbb{R}$ com $\lambda \neq 0$. O espaço $\mathbb{P}^d$, com a topologia quociente, é um espaço localmente euclidiano de dimensão d: designando por $[x^0 : \cdots : x^d]$ a classe de equivalência de $(x^0, \dots, x^d) \in \mathbb{R}^{d+1}$, para cada $\alpha = 0, \dots, n$ temos um sistema de coordenadas (U_α, ϕ_α) onde:

$$U_\alpha = \left\{[x^0 : \cdots : x^d] : x^\alpha \neq 0\right\},$$

$$\phi_\alpha : U_\alpha \to \mathbb{R}^d, \quad [x^0 : \cdots : x^d] \mapsto (\frac{x^0}{x^\alpha}, \dots, \frac{\widehat{x^\alpha}}{x^\alpha}, \dots, \frac{x^d}{x^\alpha})$$

(o sinal $\widehat{a}$ significa que omitimos o termo a). As funções de transição para estes sistemas de coordenadas são C^∞. A estrutura diferenciável standard no espaço projectivo obtém-se considerando a colecção de coordenadas maximal que contém estes sistemas de coordenadas.

*4. Se M é uma variedade d-dimensional com estrutura diferenciável $\mathcal{C}$ e $U \subset M$ é um **aberto**, então U é uma variedade d-dimensional com estrutura diferenciável*

$$\mathcal{C}_U = \{(U_\alpha \cap U, \phi_\alpha|_{U_\alpha \cap U}) : (U, \phi_\alpha) \in \mathcal{C}\}.$$

*5. Se M e N são variedades diferenciáveis, então o **produto cartesiano** $M \times N$ é uma variedade diferenciável: em $M \times N$ consideramos a colecção maximal que contêm os sistemas de coordenadas da forma $(U_\alpha \times V_\beta, \phi_\alpha \times \psi_\beta)$, onde (U_α, ϕ_α) e (V_β, ψ_β) são sistemas de coordenadas das estruturas diferenciáveis de M e N, respectivamente. Deve ser claro que $\dim M \times N = \dim M + \dim N$.*

*De forma análoga, se $M_1, \dots, M_k$ são variedades diferenciáveis de dimensões $d_1, \dots, d_k$ podemos definir uma estrutura diferenciável no produto cartesiano $M_1 \times \cdots \times M_k$, de dimensão $d_1 + \cdots + d_k$. Por exemplo, o **toro** d-dimensional $\mathbb{T}^d = \mathbb{S}^1 \times \cdots \times \mathbb{S}^1$ e os **cilindros** $\mathbb{R}^k \times \mathbb{S}^l$ são variedades diferenciáveis.*

Adoptamos, daqui em diante, a seguinte convenção:

> *Todas as variedades são Hausdorff e possuem uma base de abertos contável.*

Deve-se observar que é, por vezes, interessante estudar variedades não-Hausdorff. Estas surgem naturalmente, por exemplo, no estudo de quocientes, como veremos mais tarde na Lição 6. As variedades que não possuem uma base de abertos contável correspondem a situações bastante mais patológicas, como ilustramos no próximo exemplo.

Exemplo 1.3.
Seja $M = \mathbb{R}^2$ com a topologia gerada pelos conjuntos da forma $U \times \{y\}$, onde $U \subset \mathbb{R}$ é aberto e $y \in \mathbb{R}$. O espaço M é localmente euclidiano, com sistemas de coordenadas $(U \times \{y\}, \phi_y)$, onde $\phi_y(x, y) = x$. Como as funções de transição são de classe C^∞, obtemos uma estrutura diferenciável de dimensão 1 em $\mathbb{R}^2$ e distinta da usual. Esta variedade não tem uma base contável de abertos.

Definição 1.4. *Sejam M e N variedades diferenciáveis.*

*(i) Uma aplicação $f : M \to \mathbb{R}$ diz-se uma **função diferenciável** se $f \circ \phi^{-1}$ é de classe C^∞, para todos os sistemas de coordenadas (U, ϕ).*

*(ii) Uma aplicação $\Psi : M \to N$ diz-se uma **aplicação diferenciável** se $\tau \circ \Psi \circ \phi^{-1}$ é de classe C^∞, para todos sistemas de coordenadas (U, ϕ) de M e (V, τ) de N.*

*A uma aplicação diferenciável $\Psi : M \to N$ bijectiva, com inversa diferenciável, chamamos um **difeomorfismo**.*

Para verificar se uma aplicação $\Psi : M \to N$ é diferenciável basta verificar se, para cada $p \in M$, existem sistemas de coordenadas (U, ϕ) de M e (V, τ) de N, com $p \in U$ e $\Psi(p) \in V$, e tais que $\tau \circ \Psi \circ \phi^{-1}$ é de classe C^∞.

O conjunto das aplicações diferenciáveis entre duas variedades M e N será designado por $C^\infty(M; N)$. No caso $N = \mathbb{R}$, o conjunto das funções diferenciáveis $f : M \to \mathbb{R}$ será designado por $C^\infty(M)$ em vez de $C^\infty(M; \mathbb{R})$.

Exemplos 1.5.

*1. Claramente, a composição de duas aplicações diferenciáveis é uma aplicação diferenciável e a aplicação identidade $M \to M$ é diferenciável. As variedades e as aplicações diferenciáveis formam pois a **categoria diferenciável**.*

2. Qualquer função $F : U \to \mathbb{R}$ de classe C^∞ num aberto $\mathbb{R}^{d+1} \supset U \supset \mathbb{S}^d$ induz, por restrição, uma função $f : \mathbb{S}^d \to \mathbb{R}$ de classe C^∞. Reciprocamente, toda a função $f : \mathbb{S}^d \to \mathbb{R}$ de classe C^∞ é a restrição de uma função $F : U \to \mathbb{R}$ de classe C^∞ definida num aberto $\mathbb{R}^{d+1} \supset U \supset \mathbb{S}^d$.

3. A aplicação $\pi : \mathbb{S}^d \to \mathbb{P}^d$ definida por:

$$\pi(x^0, \ldots, x^d) = [x^0 : \cdots : x^d],$$

é uma aplicação diferenciável. Qualquer função $F : \mathbb{S}^d \to \mathbb{R}$ de classe C^∞, que seja invariante por inversão $F(-x) = F(x)$, induz uma função $f : \mathbb{P}^d \to \mathbb{R}$ de classe C^∞. A função f é a única função que torna comutativo o diagrama:

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{S}^d \arrow[r, "\pi"] \arrow[dr, "F"'] & \mathbb{P}^d \arrow[d, "f"] \\
& \mathbb{R}
\end{tikzcd}$$

Reciprocamente, toda a função em $C^\infty(\mathbb{P}^d)$ é desta forma.

Se M é uma variedade e $f \in C^\infty(M)$, definimos o **suporte de** f como sendo o conjunto fechado

$$\sup f \equiv \overline{f^{-1}(\mathbb{R} - \{0\})}.$$

Recordemos ainda que uma colecção $\{S_\alpha : \alpha \in A\}$ de subconjuntos de M diz-se *localmente finita* se, para todo o $p \in M$, existe uma vizinhança $p \in O \subset M$ tal que $O \cap S_\alpha \neq \emptyset$ para apenas um número finito de $\alpha \in A$.

Definição 1.6. *Uma **partição da unidade** numa variedade M é uma colecção $\{\phi_i : i \in I\} \subset C^\infty(M)$ que satisfaz:*

(i) a colecção de suportes $\{\sup \phi_i : i \in I\}$ é localmente finita;

(ii) $\phi_i(p) \geq 0$ e $\sum_{i \in I} \phi_i(p) = 1$ para todo o $p \in M$.

As partições da unidade são utilizadas para "colar" propriedades locais (i.e., que se verificam em domínios de coordenadas), daí resultando propriedades globais da variedade.

Uma partição da unidade $\{\phi_i : i \in I\}$ diz-se *subordinada* a uma cobertura $\{U_\alpha : \alpha \in A\}$ de M se, para cada $i \in I$, existe um $\alpha \in A$ tal que $\sup \phi_i \subset U_\alpha$.

Teorema 1.7 (Existência de Partições da Unidade)**.** *Seja M uma variedade diferenciável e $\{U_\alpha : \alpha \in A\}$ uma cobertura aberta de M. Então existe uma partição da unidade contável $\{\phi_i : i = 1, 2, \dots\}$, subordinada à cobertura $\{U_\alpha : \alpha \in A\}$, com $\sup \phi_i$ compacto para todo o i.*

Demonstração. Necessitamos dos seguintes factos, cuja demonstração deixamos como exercício:

(a) Toda a cobertura aberta de uma variedade M possui um refinamento aberto, contável, localmente finito, e com fecho compacto.
(b) Toda a cobertura aberta de uma variedade M possui uma sub-cobertura contável.
(c) Existe uma função $\phi \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$ tal que $\phi(x) = 1$, se $x \in \overline{B_1(0)}$, e $\phi(x) = 0$, se $x \in B_2(0)^c$.

Por (a), podemos supor que a cobertura $\{U_\alpha : \alpha \in A\}$ é localmente finita, contável, e que os $\overline{U}_\alpha$ são compactos. Dado $p \in U_\alpha$, podemos escolher um sistema de coordenadas (V_p, τ) centrado em p, com $V_p \subset U_\alpha$, e tal que $\overline{B_2(0)} \subset \tau(V_p)$. Se ϕ é a função de (c), definimos:

$$\psi_p = \begin{cases} \phi \circ \tau, & \text{em } V_p, \\ \\ 0, & \text{em } M - V_p. \end{cases}$$

Observe-se que a função ψ_p assume o valor 1 num aberto $W_p \subset V_p$ contendo p. Como $\{W_p : p \in M\}$ é uma cobertura aberta de M, por (b), existe uma sub-cobertura contável $\{W_{p_1}, W_{p_2}, \dots\}$, que ainda cobre M. A cobertura $\{V_{p_1}, V_{p_2}, \dots\}$ é localmente finita, subordinada à cobertura $\{U_\alpha : \alpha \in A\}$, e com os $\overline{V}_{p_i}$ compactos.

Assim, a função

$$\psi = \sum_{i=1}^{+\infty} \psi_{p_i},$$

está bem definida, é C^∞, e $\phi(p) > 0$ para cada $p \in M$. Se definirmos:

$$\phi_i = \frac{\psi_{p_i}}{\psi},$$

então as funções $\{\phi_1, \phi_2, \dots\}$ formam uma partição da unidade, subordinada à cobertura $\{U_\alpha : \alpha \in A\}$, e com $\sup \phi_i$ compacto para todo o $i \in I$. □

Se não exigirmos que os suportes sejam compactos podemos obter uma partição da unidade com o mesmo conjunto de índices:

Corolário 1.8. *Seja M uma variedade diferenciável e $\{U_\alpha : \alpha \in A\}$ uma cobertura aberta de M. Então existe uma partição da unidade $\{\phi_\alpha : \alpha \in A\}$ tal que $\sup \phi_\alpha \subset U_\alpha$ para todo o $\alpha \in A$.*

Demonstração. Pelo teorema existe uma partição partição da unidade contável $\{\psi_i : i = 1, 2, \dots\}$ subordinada à cobertura $\{U_\alpha : \alpha \in A\}$. Para cada i escolhemos um $\alpha = \alpha(i)$ tal que $\sup \psi_i \subset U_{\alpha(i)}$. Então vemos que as funções

$$\phi_\alpha = \begin{cases} \sum_{\alpha(i)=\alpha} \psi_i, & \text{se } \{i : \alpha(i) = \alpha\} \neq \emptyset, \\ \\ 0 & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

formam uma partição da unidade, com $\sup \phi_\alpha \subset U_\alpha$, para todo o $\alpha \in A$. □

Corolário 1.9. *Seja $F \subset O \subset M$, com O aberto e F fechado. Existe uma função $\phi \in C^\infty(M)$ tal que:*

(i) $0 \leq \phi(p) \leq 1$ *para todo o* $p \in M$*;*
(ii) $\phi(p) = 1$ *se* $p \in F$*;*
(iii) $\sup \phi \subset O$.

Demonstração. Os abertos $\{O, M - F\}$ formam uma cobertura aberta de M. Pelo corolário anterior, existe uma partição da unidade $\{\phi, \psi\}$ com $\sup \phi \subset O$ e $\sup \psi \subset M - F$. A função ϕ satisfaz (i)-(iii). □

Exercícios.

1. Mostre que uma variedade é um espaço normal. Conclua que uma variedade é metrizável.

2. Mostre que uma variedade é um espaço localmente compacto.

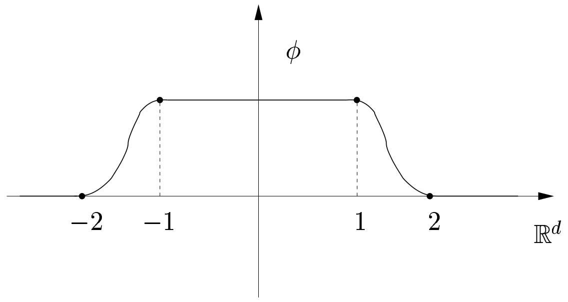
3. Mostre que uma variedade é localmente conexa por arcos, e que uma variedade conexa é conexa por arcos.

4. Mostre que toda a cobertura aberta de uma variedade M possui uma subcobertura contável.

5. Mostre que toda a cobertura aberta de uma variedade M possui um refinamento aberto, contável, localmente finito e com fecho compacto.

6. Mostre que existe uma função $\phi \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$ tal que $0 \leq \phi(x) \leq 1$ e:

$$\phi(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } |x| \leq 1 \\ \\ 0 & \text{se } |x| > 2 \end{cases}$$



7. Complete os detalhes do Exemplo 1.2.2 da esfera $\mathbb{S}^d$ (calcule as funções de transição para as projecções estereográficas e verifique que são C^∞).

8. Complete os detalhes do Exemplo 1.2.3 do espaço projectivo $\mathbb{P}^d$ (calcule as funções e verifique que são C^∞). Mostre ainda que:
(a)$\mathbb{P}^1$ é difeomorfo a $\mathbb{S}^1$;
(b)$\mathbb{P}^d - \mathbb{P}^{d-1}$ é difeomorfo ao disco aberto $D^n = \{x \in \mathbb{R}^d : ||x|| < 1\}$ (identifique $\mathbb{P}^{d-1}$ com o subconjunto $\{[x^0 : \cdots : x^d] : x^d = 0\} \subset \mathbb{P}^d$).

9. Seja $M \subset \mathbb{R}^n$ um subconjunto que satisfaz a seguinte propriedade: para cada $p \in M$, existe um aberto $U \subset \mathbb{R}^n$ que contém p e um homeomorfismo $\psi : V \to M \cap U$, onde $V \subset \mathbb{R}^k$ é um aberto, tal que ψ é uma aplicação diferenciável e para todo o $q \in V$ a derivada $\psi'(q) : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ é injectiva. Mostre que M é uma variedade de dimensão k. Diz-se que M é uma k-**superfície** em $\mathbb{R}^n$ e que ψ é uma **parametrização** de M. No caso $k = 1$, dizemos que M é uma **curva**, no caso $k = 2$ dizemos que M é uma **superfície**, e no caso $k = n - 1$ dizemos que M é uma **hipersuperfície**.

10. Seja $M \subset \mathbb{R}^n$ um subconjunto que satisfaz a seguinte propriedade: para cada $p \in M$, existe um aberto $U \subset \mathbb{R}^n$ que contém p e um difeomorfismo $\Phi : U \to V$ para um aberto $V \subset \mathbb{R}^n$, tais que:

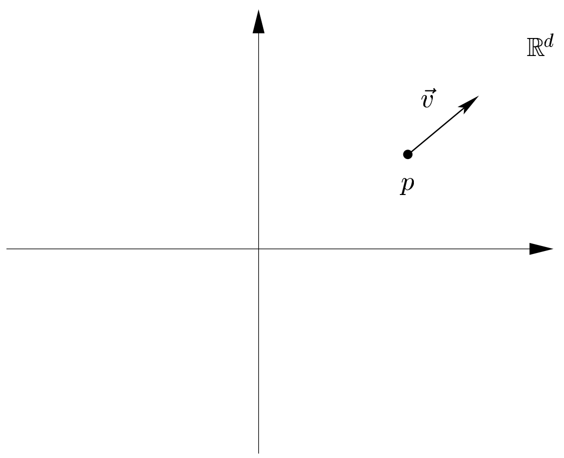
$$\Phi(U \cap M) = \left\{q \in V : q^{k+1} = \cdots = q^n = 0\right\}.$$

Mostre que M é uma variedade de dimensão k (de facto, M é uma k-superfície em $\mathbb{R}^n$; cf. exercício anterior).

Lição 2. Espaço Tangente e Diferencial

O espaço tangente a $\mathbb{R}^d$ num ponto $p \in \mathbb{R}^d$ é definido como sendo o conjunto

$$T_p\mathbb{R}^d = \left\{(p, \vec{v}) : \vec{v} \in \mathbb{R}^d\right\}.$$



Este espaço tangente admite uma estrutura de espaço vectorial real, em que a adição é definida por:

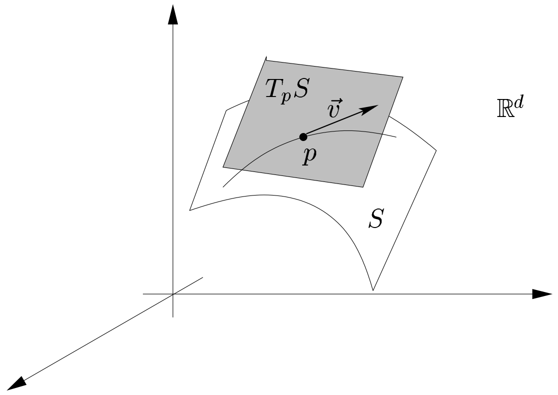
$$(p, \vec{v}_1) + (p, \vec{v}_2) \equiv (p, \vec{v}_1 + \vec{v}_2),$$

e a multiplicação por escalares é dada por:

$$\lambda(p, \vec{v}) \equiv (p, \lambda\vec{v}).$$

É claro que temos um isomorfismo natural $T_p\mathbb{R}^d \simeq \mathbb{R}^d$, mas, em muitas situações, é preferível pensarmos em $T_p\mathbb{R}^d$ como o conjunto dos vectores com origem em p.

Esta distinção é ainda mais clara no caso de uma k-superfície $S \subset \mathbb{R}^n$ (cf. Exercício 9 da Lição 1). Neste caso, podemos definir o espaço tangente a S num ponto $p \in S$, como sendo o subespaço $T_pS \subset T_p\mathbb{R}^n$, formado pelos vectores tangentes $(p, \vec{v})$, para os quais existe uma curva diferenciável $c : (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{R}^n$, com $c(t) \in S$, $c(0) = p$ e $c'(0) = \vec{v}$.



Observe ainda que um vector tangente $(p, \vec{v})$ actua nas funções diferenciáveis definidas numa vizinhança de p. De facto, se $f : U \to \mathbb{R}$ é uma função diferenciável num aberto U que contém p, podemos escolher uma curva diferenciável $c : (-\varepsilon, \varepsilon) \to U$, com $c(0) = p$ e $c'(0) = \vec{v}$, e definimos:

$$(p, \vec{v})(f) = \frac{d}{dt} f \circ c(0).$$

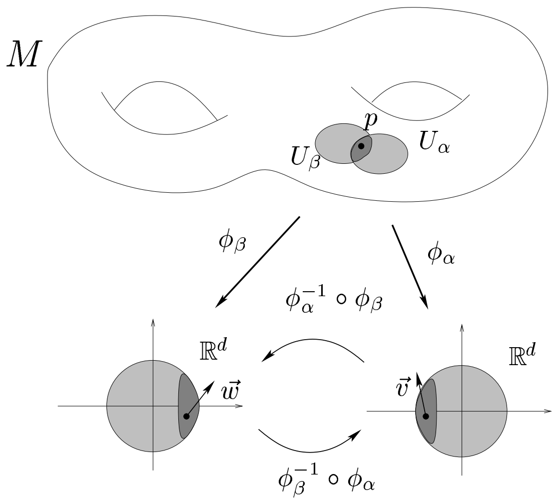
Esta operação não depende da escolha de c. De facto, esta definição não é mais que a **derivada direccional** de f em p na direcção $\vec{v}$.

Vamos agora definir o espaço tangente a uma variedade diferenciável M num ponto $p \in M$. É possível fornecer várias descrições distintas deste espaço tangente, e que correspondem a diferentes pontos de vista, todos eles úteis. Fornecemos aqui três descrições, ficando como exercício mostrar que estas são todas equivalentes.

Descrição 1. Seja M uma variedade diferenciável de dimensão d, com estrutura diferenciável $\mathcal{C} = \{(U_\alpha, \phi_\alpha) : \alpha \in A\}$. A cada ponto $p \in M$, gostaríamos de associar uma cópia de $\mathbb{R}^d$, sendo que cada elemento $\vec{v} \in \mathbb{R}^d$ deverá representar um vector tangente. É claro que se $p \in U_\alpha$, o sistema de coordenadas ϕ_α fornece uma identificação de uma vizinhança de p com $\mathbb{R}^d$. Diferentes sistemas de coordenadas fornecem identificações distintas, estando estas identificações relacionadas pelas funções de transição.

Assim, vamos considerar triplos $(p, \alpha, \vec{v}) \in M \times A \times \mathbb{R}^d$, e no conjunto destes triplos tomamos a seguinte relação de equivalência:

$$[p, \alpha, \vec{v}] = [q, \beta, \vec{w}] \qquad \text{sse} \qquad p = q \ \text{ e } \ (\phi_\alpha \circ \phi_\beta^{-1})'(p) \cdot \vec{w} = \vec{v}.$$



Um **vector tangente** a M num ponto $p \in M$ é uma classe de equivalência $[p, \alpha, \vec{v}]$, e o conjunto dos vectores tangentes em p é o **espaço tangente** em p:

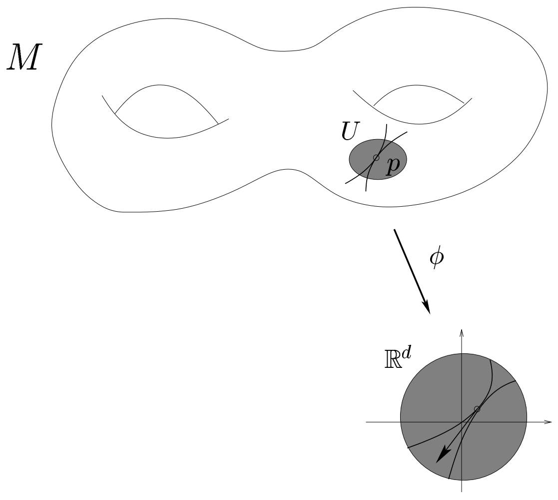
$$T_pM \equiv \left\{ [p, \alpha, \vec{v}] : \alpha \in A, \vec{v} \in \mathbb{R}^d \right\}.$$

Deixamos como exercício simples verificar que T_pM possui uma estrutura natural de espaço vectorial, e que temos ainda um isomorfismo $T_pM \simeq \mathbb{R}^d$, mas este isomorfismo depende agora do sistema de coordenadas utilizado.

Descrição 2. Fixemos $p \in M$. Para esta segunda descrição, vamos considerar curvas diferenciáveis $c : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$, com $c(0) = p$. Vamos ainda identificar duas curvas c_1 e c_2 se, para algum sistema de coordenadas (U, ϕ) com $p \in U$, temos

$$\frac{d}{dt}(\phi \circ c_1)(0) = \frac{d}{dt}(\phi \circ c_2)(0).$$

É claro que, se esta condição se verifica para um sistema de coordenadas, então também se verifica para todos os outros sistemas de coordenadas da estrutura diferenciável.



Chamamos então **vector tangente** num ponto $p \in M$ a uma classe de equivalência de curvas $[c]$. O conjunto dos vectores tangente a M num ponto p formam o **espaço tangente** T_pM no ponto p. Mais uma vez, deixamos como exercício simples verificar que o espaço tangente possui uma estrutura de espaço vectorial, e que T_pM é isomorfo a $\mathbb{R}^d$ (um isomorfismo que depende da escolha de um sistema de coordenadas).

Descrição 3. As duas descrições anteriores utilizam sistemas de coordenadas. A vantagem da descrição seguinte é que não recorre a sistemas de coordenadas. Esta será a nossa descrição definitiva do espaço tangente e deixamos como exercício verificar que todas estas descrições são equivalentes.

Mais uma vez fixamos um ponto $p \in M$ e consideramos funções diferenciáveis definidas numa vizinhança de p. Dadas duas funções diferenciáveis $f : U \to \mathbb{R}$ e $g : V \to \mathbb{R}$, onde U e V são abertos contendo p, dizemos que elas definem o mesmo **germe** em p, se existe um aberto $W \subset U \cap V$ contendo p e tal que

$$f|_W = g|_W.$$

Designamos por $\mathcal{G}_p$ o conjunto dos germes no ponto p. Este conjunto possui uma estrutura de álgebra sobre $\mathbb{R}$, já que se define adição, produto, e multiplicação por escalares, de forma óbvia:

$$\begin{aligned} [f] + [g] &\equiv [f + g], \\ [f][g] &\equiv [fg], \\ \lambda[f] &\equiv [\lambda f]. \end{aligned}$$

Observe-se, ainda, que faz sentido falar no valor de um germe $[f] \in \mathcal{G}_p$ no ponto p, nomeadamente $f(p)$. Por outro lado, não faz sentido falar no valor de $[f] \in \mathcal{G}_p$ em pontos $q \neq p$.

Definição 2.1. *Um **vector tangente** num ponto $p \in M$ é uma derivação linear de $\mathcal{G}_p$, i.e., é uma aplicação $\mathbf{v} : \mathcal{G}_p \to \mathbb{R}$, tal que:*

(i) $\mathbf{v}([f] + \lambda[g]) = \mathbf{v}([f]) + \lambda\mathbf{v}([g])$;
(ii) $\mathbf{v}([f][g]) = \mathbf{v}([f])g(p) + f(p)\mathbf{v}([g])$;

*Chama-se **espaço tangente** ao conjunto dos vectores tangente no ponto p e designa-se por T_pM.*

O espaço tangente possui uma estrutura natural de espaço vectorial real, pois se $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in T_pM$ são derivações lineares, então $\mathbf{v}_1 + \lambda\mathbf{v}_2$ também é uma derivação linear, para todo o número real $\lambda \in \mathbb{R}$.

Exemplo 2.2.
Seja $(U, \phi) = (U, x^1, \ldots, x^d)$ um sistema de coordenadas em M com $p \in U$. Definimos os vectores tangentes $\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p \in T_pM$, $i = 1, \ldots, d$, como sendo as derivações

$$\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p ([f]) = \left.\frac{\partial(f \circ \phi^{-1})}{\partial x^i}\right|_{\phi(p)}.$$

Observe que o vector tangente $\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p$ corresponde à direcção obtida variando a coordenada i e congelando todas as outras coordenadas

Para verificar que a dimensão de T_pM é igual a $\dim M$, vamos considerar os germes de funções que se anulam em p

$$\mathcal{M}_p = \{[f] \in \mathcal{G}_p : f(p) = 0\},$$

É fácil verificar que $\mathcal{M}_p \subset \mathcal{G}_p$ é um ideal maximal de $\mathcal{G}_p$. Definindo as potências

$$\mathcal{M}_p^k = \underbrace{\mathcal{M}_p \cdots \mathcal{M}_p}_{k},$$

obtemos uma torre de ideais:

$$\mathcal{G}_p \supset \mathcal{M}_p \supset \mathcal{M}_p^2 \supset \cdots \supset \mathcal{M}_p^k \supset \dots$$

Observe que o ideal $\mathcal{M}_p^k$ não é mais que o conjunto dos germes de funções que são zero em p até ordem k: se $[f] \in \mathcal{M}_p^k$ e (U, ϕ) é um sistema de coordenadas centrado em p, então a função $f \circ \phi^{-1}$ tem todas as derivadas em p, de ordem menor ou igual a k, nulas.

Teorema 2.3. *O espaço tangente T_pM é isomorfo a $(\mathcal{M}_p/\mathcal{M}_p^2)^*$ e tem dimensão* $\dim M$.

Demonstração. Observe que, se $[c] \in \mathcal{G}_p$ é o germe da função constante $f(x) = c$, então $\mathbf{v}([c]) = 0$, para todo o vector tangente $\mathbf{v} \in T_pM$. De facto, temos que

$$\mathbf{v}([c]) = c\mathbf{v}([1]),$$

e que

$$\mathbf{v}([1]) = \mathbf{v}([1][1]) = 1\mathbf{v}([1]) + 1\mathbf{v}([1]) = 2\mathbf{v}([1]),$$

logo $\mathbf{v}([1]) = 0$. Assim, se $[f] \in \mathcal{G}_p$ e $c = f(p)$, vemos que

$$\mathbf{v}([f]) = \mathbf{v}([f] - [c]),$$

donde $\mathbf{v}$ fica completamente determinado pelos valores que toma em $\mathcal{M}_p$. Por outro lado, as derivações anulam-se nos germes de $\mathcal{M}_p^2$, pois se $f(p) = g(p) = 0$, então

$$\mathbf{v}([f][g]) = \mathbf{v}([f])g(p) + f(p)\mathbf{v}([g]) = 0.$$

Assim, todo o $\mathbf{v} \in T_pM$ determina uma transformação linear $\mathcal{M}_p \to \mathbb{R}$, que é zero em $\mathcal{M}_p^2$. Reciprocamente, dada uma transformação linear $L \in (\mathcal{M}_p/\mathcal{M}_p^2)^*$, definimos $\mathbf{v} : \mathcal{G}_p \to \mathbb{R}$ por

$$\mathbf{v}([f]) \equiv L([f] - [f(p)]).$$

É claro que $\mathbf{v}$ é um transformação linear, e verificamos facilmente que é uma derivação. Concluímos, pois, que $T_pM \simeq (\mathcal{M}_p/\mathcal{M}_p^2)^*$.

Para verificar a dimensão de T_pM, consideramos um sistema de coordenadas $(U, x^1, \dots, x^d)$ centrado em p, e mostramos que os vectores tangentes

$$\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p \in T_pM, \qquad i = 1, \dots, d,$$

formam uma base para T_pM. Se $f : U \to \mathbb{R}$ é uma função diferenciável, então $f \circ \phi^{-1} : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ é uma função diferenciável numa vizinhança da origem. Esta função admite a expansão:

$$f \circ \phi^{-1}(x) = f \circ \phi^{-1}(0) + \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial (f \circ \phi^{-1})}{\partial x^i}(0) x^i + \sum_{i,j} g_{ij}(x) x^i x^j,$$

onde os g_{ij} são funções diferenciáveis numa vizinhança de origem. Assim, compondo com ϕ, obtemos a seguinte expansão válida para qualquer $q \in U$:

$$f(q) = f(p) + \sum_{i=1}^{d} \left. \frac{\partial (f \circ \phi^{-1})}{\partial x^i} \right|_{\phi(p)} x^i(q) + \sum_{i,j} h_{ij}(q) x^i(q) x^j(q),$$

onde $h_{ij} \in C^\infty(U)$. Concluímos que, para qualquer vector tangente $\mathbf{v} \in T_pM$,

$$\mathbf{v}([f]) = \sum_{i=1}^{d} \left. \frac{\partial (f \circ \phi^{-1})}{\partial x^i} \right|_{\phi(p)} \mathbf{v}([x^i]),$$

ou seja que:

$$\mathbf{v} = \sum_{i=1}^{d} a^i \left. \frac{\partial}{\partial x^i} \right|_p,$$

onde $a^i = \mathbf{v}([x^i])$. Isto mostra que os $(\partial/\partial x^i)|_p \in T_pM$ formam um conjunto gerador. Deixamos como exercício verificar que são linearmente independentes. $\square$

Daqui em diante, se $\mathbf{v} \in T_pM$ e f é uma função diferenciável definida numa vizinhança de p, definimos

$$\mathbf{v}(f) \equiv \mathbf{v}([f]).$$

É claro que $\mathbf{v}(f) = \mathbf{v}(g)$, se f e g coincidem numa vizinhança de p, e que

$$\mathbf{v}(f + \lambda g) = \mathbf{v}(f) + \lambda \mathbf{v}(g), \quad (\lambda \in \mathbb{R}),$$
$$\mathbf{v}(fg) = f(p)\mathbf{v}(g) + \mathbf{v}(f)g(p),$$

onde $f + \lambda g$ e fg estão definidas na intersecção dos domínios de f e g.

A demonstração do Teorema 2.3 mostra que, se $(U, \phi) = (U, x^1, \ldots, x^d)$ é um sistema de coordenadas em p, então qualquer vector tangente $\mathbf{v} \in T_pM$ pode ser escrito na forma

$$\mathbf{v} = \sum_{i=1}^{d} a^i \left. \frac{\partial}{\partial x^i} \right|_p.$$

Os $a^i = \mathbf{v}(x^i)$ são as **componentes do vector tangente $\mathbf{v}$** no sistema de coordenadas $(U, x^1, \ldots, x^d)$. Introduzindo a notação

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x^i} \right|_p \equiv \left. \frac{\partial f \circ \phi^{-1}}{\partial x^i} \right|_{\phi(p)},$$

temos, ainda, que

$$\mathbf{v}(f) = \sum_{i=1}^{d} a^i \left. \frac{\partial f}{\partial x^i} \right|_p.$$

Por outro lado, se $(V, y^1, \ldots, y^d)$ é outro sistema de coordenadas, segue-se que

$$\left.\frac{\partial}{\partial y^j}\right|_p = \sum_{i=1}^{d} \left.\frac{\partial x^i}{\partial y^j}\right|_p \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p .$$

Assim, neste sistema de coordenadas temos

$$\mathbf{v} = \sum_{j=1}^{d} b^j \left.\frac{\partial}{\partial y^j}\right|_p, \qquad \text{com } b^j = \mathbf{v}(y^j),$$

onde as novas componentes b^j estão relacionadas com as componentes a^i pela fórmula de transformação:

$$a^i = \sum_{j=1}^{d} \left.\frac{\partial x^i}{\partial y^j}\right|_p b^j. \tag{2.1}$$

Uma aplicação diferenciável entre duas variedades induz uma transformação linear entre os espaços tangentes respectivos:

Definição 2.4. *Seja $\Psi : M \to N$ uma aplicação diferenciável. Chama-se* ***diferencial*** *de Ψ em $p \in M$ à transformação linear $\mathrm{d}_p\Psi : T_pM \to T_{\Psi(p)}N$ definida por*

$$\mathrm{d}_p\Psi(\mathbf{v})(f) \equiv \mathbf{v}(f \circ \Psi),$$

onde f é qualquer função diferenciável definida numa vizinhança de p.

Se $(U, x^1, \ldots, x^d)$ é um sistema de coordenadas em p e $(V, y^1, \ldots, y^e)$ é um sistema de coordenadas em $\Psi(p)$, obtemos

$$\mathrm{d}_p\Psi \cdot \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p = \sum_{j=1}^{e} \left.\frac{\partial(y^j \circ \Psi)}{\partial x^i}\right|_p \left.\frac{\partial}{\partial y^j}\right|_{\Psi(p)} .$$

À matriz das derivadas parciais $\frac{\partial(y^j \circ \Psi)}{\partial x^i}$ chamamos **matriz jacobiana** da transformação Ψ em relação aos sistemas de coordenadas escolhidos.

A proposição seguinte segue-se imediatamente das definições e do resultado correspondente para aplicações $\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^e$:

Proposição 2.5 (Regra da Cadeia)**.** *Se $\Psi : M \to N$ e $\Phi : N \to P$ são aplicações diferenciáveis, então a sua composta $\Phi \circ \Psi$ é diferenciável, e temos*

$$\mathrm{d}_p(\Phi \circ \Psi) = \mathrm{d}_{\Psi(p)}\Phi \circ \mathrm{d}_p\Psi.$$

É igualmente fácil verificar o seguinte resultado, que generaliza um resultado bem conhecido:

Proposição 2.6. *Se uma aplicação diferenciável $\Psi : M \to N$ tem diferencial nulo num aberto conexo $U \subset M$, então Ψ é constante em U.*

Um caso especial muito importante é o do diferencial de uma função $f : M \to \mathbb{R}$. Neste caso, o diferencial é uma aplicação linear $\mathrm{d}_pf : T_pM \to T_{f(p)}\mathbb{R}$, e como temos uma identificação canónica $T_x\mathbb{R} \simeq \mathbb{R}$, o diferencial é um elemento do espaço vectorial dual de T_pM.

Definição 2.7. *Chama-se* **espaço cotangente** *a M num ponto p ao espaço vectorial T_p^*M dual do espaço tangente T_pM:*

$$T_p^*M \equiv \{\omega : T_pM \to \mathbb{R},\ \textit{com } \omega \textit{ linear}\}.$$

É claro que podemos definir $\mathrm{d}_pf \in T_p^*M$ mesmo que f seja uma função diferenciável definida *apenas* numa vizinhança de p. Por exemplo, uma vez fixado um sistema de coordenadas $(U, x^1, \ldots, x^d)$ em p, obtemos elementos

$$\left\{\mathrm{d}_px^1, \ldots, \mathrm{d}_px^d\right\} \subset T_p^*M.$$

É, ainda, fácil verificar que

$$\mathrm{d}_px^i \cdot \left.\frac{\partial}{\partial x^j}\right|_p = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j, \\ 0 & \text{se } i \neq j. \end{cases}$$

Logo:

Lema 2.8. $\{\mathrm{d}_px^1, \ldots, \mathrm{d}_px^d\}$ *é a base dual da base* $\{\left.\frac{\partial}{\partial x^1}\right|_p, \ldots, \left.\frac{\partial}{\partial x^d}\right|_p\}$.

Assim, uma vez escolhidas coordenadas locais $(U, x^1, \ldots, x^d)$ em p, todo o elemento $\omega \in T_p^*M$ pode ser escrito na base $\{\mathrm{d}_px^1, \ldots, \mathrm{d}_px^d\}$:

$$\omega = \sum_{i=1}^{d} a_i \mathrm{d}_px^i, \qquad \text{com } a_i = \omega(\partial/\partial x^i\big|_p).$$

Se $(V, y^1, \ldots, y^d)$ é outro sistema de coordenadas, temos que

$$\omega = \sum_{i=j}^{d} b_j \mathrm{d}_px^j, \qquad \text{com } b_j = \omega(\partial/\partial y^j\big|_p),$$

e verifica-se facilmente que

$$a_i = \sum_{j=1}^{d} \left.\frac{\partial y^j}{\partial x^i}\right|_p b_j. \tag{2.2}$$

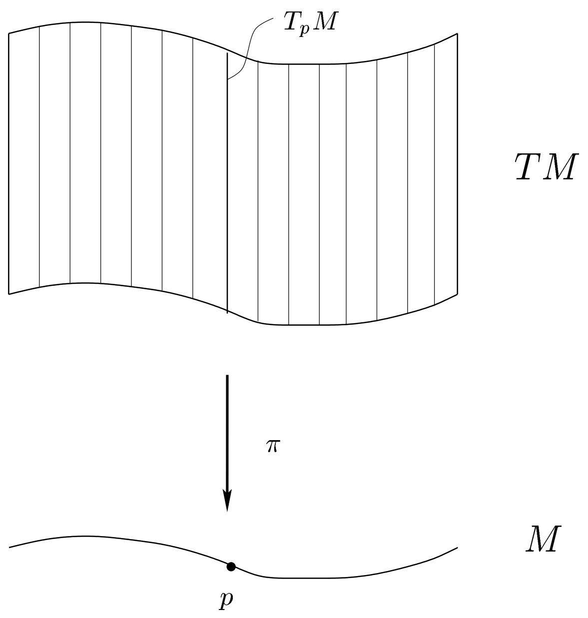
Esta fórmula de transformação de componentes de elementos de T_p^*M deve ser comparada com (2.1), a fórmula correspondente para elementos de T_pM.

Como veremos adiante, é útil considerar a família de todos os espaços tangentes (ou cotangentes) a M. Assim, definimos o **fibrado tangente** e o **fibrado cotangente** de M por

$$TM \equiv \bigcup_{p \in M} T_pM, \qquad T^*M \equiv \bigcup_{p \in M} T_p^*M.$$

Temos projecções naturais $\pi : TM \to M$ e $\pi : T^*M \to M$, que a um vector tangente $\mathbf{v} \in T_pM$ e a um covector $\omega \in T_p^*M$ associam o seu ponto base $\pi(\mathbf{v}) = p = \pi(\omega)$. A designação “fibrado” vem do facto que podemos pensar em TM (ou T^*M) como um conjunto de fibras (os espaços T_pM ou T_p^*M), justapostos uns com os outros, e formando uma variedade:

Proposição 2.9. *TM e T^*M possuem estruturas naturais de variedades diferenciáveis de dimensão $2\dim M$, tais que as projecções na base são aplicações diferenciáveis.*



Demonstração. Consideramos o caso de TM, deixando a demonstração de que T^*M é uma variedade como exercício.

Seja $\mathcal{C} = \{(U_\alpha, \phi_\alpha) : \alpha \in A\}$ a estrutura diferenciável de M. Para cada sistema de coordenadas $(U_\alpha, \phi_\alpha) = (U_\alpha, x^1, \ldots, x^n)$, definimos a aplicação $\tilde{\phi}_\alpha : \pi^{-1}(U_\alpha) \to \mathbb{R}^{2d}$ por

$$\tilde{\phi}_\alpha(\mathbf{v}) = (x^1(\pi(\mathbf{v})), \ldots, x^d(\pi(\mathbf{v})), \mathrm{d}_{\pi(\mathbf{v})}x^1(\mathbf{v}), \ldots, \mathrm{d}_{\pi(\mathbf{v})}x^d(\mathbf{v})).$$

Verificamos, facilmente, que:

(a) A colecção $\left\{\tilde{\phi}_\alpha^{-1}(O) : O \subset \mathbb{R}^{2d} \text{ aberto}, \alpha \in A\right\}$ é uma base para uma topologia de TM, que faz de TM um espaço localmente euclidiano, Hausdorff, e que satisfaz o segundo axioma.

(b) Para quaisquer sistemas de coordenadas (U_α, ϕ_α) e (U_β, ϕ_β) de M, a função $\tilde{\phi}_\beta \circ \tilde{\phi}_\alpha^{-1}$ é de classe C^∞.

Assim, se tomarmos a colecção maximal de sistemas de coordenadas compatíveis com a colecção $\left\{(\pi^{-1}(U_\alpha), \tilde{\phi}_\alpha) : \alpha \in A\right\}$, obtemos uma estrutura de variedade em TM. Para esta estrutura, temos que $\dim TM = 2\dim M$, e a aplicação $\pi : TM \to M$ é diferenciável. $\square$

Se $\Psi : M \to N$ é uma aplicação diferenciável, escrevemos $\mathrm{d}\Psi : TM \to TN$ para representar a aplicação entre fibrados tangentes definida por

$$\mathrm{d}\Psi(\mathbf{v}) \equiv \mathrm{d}_{\pi(\mathbf{v})}\Psi(\mathbf{v}).$$

A esta aplicação chamamos ainda o **diferencial** de Ψ. Deixamos como exercício verificar que $\mathrm{d}\Psi : TM \to TN$ é uma aplicação diferenciável entre as variedades diferenciáveis TM e TN.

Se $f : M \to \mathbb{R}$ é uma função diferenciável e $(U, x^1, \ldots, x^d)$ é um sistema de coordenadas em p, então $\mathrm{d}_p f \in T_p^*M$ e, pela definição, obtemos:

$$\mathrm{d}_p f \cdot \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p = \left.\frac{\partial f}{\partial x^i}\right|_p .$$

Concluímos, pois, que a expressão para o diferencial nas coordenadas locais $(x^1, \ldots, x^d)$ é:

$$\mathrm{d}f|_U = \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial f}{\partial x^i} \mathrm{d}x^i.$$

Observe que nesta fórmula todos os termos estão bem definidos (ao contrário de algumas manipulações clássicas com expressões do tipo $\mathrm{d}f$, que podem ser encontradas nalguns livros de texto).

Exercícios.

1. Mostre que as três descrições de vectores tangentes fornecidas nesta lição são equivalentes.

2. Considere em $\mathbb{R}^3$ as coordenadas cartesianas usuais (x, y, z). As coordenadas esféricas (U, ϕ), onde $U = \mathbb{R}^3 - \{(x, 0, z) : x \geq 0\}$ e $\phi = (r, \theta, \varphi)$, são definidas, como é usual, por

- $r(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ é a distância à origem;
- $\theta(x, y, z)$ é a longitude , i.e., o ângulo em $]0, 2\pi[$ entre o vector $(x, y, 0)$ e o eixo Ox;
- $\varphi(x, y, z)$ é a co-latitude, i.e., o ângulo em $]0, \pi[$ entre o vector (x, y, z) e o eixo Oz.

Calcule:

(a) As componentes do vectores tangentes a $\mathbb{R}^3$ $\frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{\partial \theta}, \frac{\partial}{\partial \varphi}$ em coordenadas cartesianas;

(b) As componentes do vectores tangentes a $\mathbb{R}^3$ $\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}$ em coordenadas esféricas.

3. Considere uma k-superfície $M \subset \mathbb{R}^n$ (Exercício 9 da Lição 1). Mostre que, se $\psi : V \to M \cap U$ é uma parametrização de uma vizinhança de $p \in M$, então o espaço tangente T_pM pode ser identificado com o subespaço $\psi'(q)(\mathbb{R}^k) \subset \mathbb{R}^n$.

4. Seja $(U, x^1, \ldots, x^d)$ um sistema de coordenadas locais na variedade M. Mostre que os vectores tangentes

$$\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p \in T_pM, \qquad i = 1, \ldots, d,$$

são linearmente independentes.

5. Mostre que T^*M possui uma estrutura natural de variedade diferenciável de dimensão $2 \dim M$, tal que a projecção na base é uma aplicação diferenciável.

6. Verifique que, se M e N são variedades diferenciáveis e $\Psi : M \to N$ é uma aplicação diferenciável, então $\mathrm{d}\Psi : TM \to TN$ é uma aplicação diferenciável.

As propriedades do diferencial de uma aplicação entre variedades reflectem as propriedades locais da aplicação. A seguinte definição distingue os tipos principais de aplicações diferenciáveis:

Definição 3.1. *Seja $\Psi : M \to N$ uma aplicação diferenciável.*

*(a) Ψ diz-se uma **imersão** se $\mathrm{d}_p\Psi : T_pM \to T_{\Psi(p)}N$ é injectiva, para todo o $p \in M$;*
*(b) Ψ diz-se uma **submersão** se $\mathrm{d}_p\Psi : T_pM \to T_{\Psi(p)}N$ é sobrejectiva, para todo o $p \in M$;*
*(a) Ψ diz-se uma **étale**[1] se $\mathrm{d}_p\Psi : T_pM \to T_{\Psi(p)}N$ é um isomorfismo, para todo o $p \in M$.*

As imersões, submersões, e étales, possuem formas canónicas locais. Todas elas são casos especiais do seguinte resultado geral:

Teorema 3.2 (Teorema do Rank)**.** *Seja $\Psi : M \to N$ é uma aplicação diferenciável e $p \in M$. Se a aplicação $\mathrm{d}_q\Psi : T_qM \to T_{\Psi(q)}N$ tem rank constante r, para todo o q numa vizinhança de p, então existem coordenadas locais $(U, \phi) = (U, x^1, \dots, x^d)$ centradas em p e coordenadas locais $(V, \psi) = (V, y^1, \dots, y^e)$ centradas em $\Psi(p)$, tais que:*

$$\psi \circ \Psi \circ \phi^{-1}(x^1, \dots, x^d) = (x^1, \dots, x^r, 0, \dots, 0).$$

Demonstração. Seja $(\tilde{U}, \tilde{\phi})$ e $(\tilde{V}, \tilde{\psi})$ coordenadas locais centradas em p e em $\Psi(p)$, respectivamente. A aplicação

$$\tilde{\psi} \circ \Psi \circ \tilde{\phi} : \tilde{\phi}(\tilde{U} \cap \tilde{V}) \to \tilde{\psi}(\tilde{U} \cap \tilde{V})$$

é uma aplicação de uma vizinhança de zero em $\mathbb{R}^d$ numa vizinhança de zero em $\mathbb{R}^e$, cujo diferencial tem rank constante. Assim, basta considerar o caso em que $\Psi : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^e$ é uma aplicação

$$(x^1, \dots, x^d) \mapsto (\Psi^1(x), \dots, \Psi^e(x)),$$

com diferencial de rank constante numa vizinhança da origem.

Designando por r o rank de $\mathrm{d}\Psi$, podemos então assumir, eventualmente após um reordenamento das coordenadas, que

$$\det \left[\frac{\partial \Psi^j}{\partial x^i}\right]_{i,j=1}^{r} (0) \neq 0.$$

Segue-se, do Teorema da Função Inversa, que a aplicação $\phi : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ definida por

$$(x^1, \dots, x^d) \to (\Psi^1(x), \dots, \Psi^r(x), x^{r+1}, \dots, x^d),$$

é um difeomorfismo numa vizinhança da origem. É fácil de ver que:

$$\Psi \circ \phi^{-1}(x^1, \dots, x^d) = (x^1, \dots, x^r, *, \dots, *).$$

[1] Usamos este termo provisoriamente. Veremos mais adiante que uma étale não é mais que um difeomorfismo local (ver Corolário 3.5).

Se q é um ponto qualquer do domínio de $\Psi \circ \phi^{-1}$, calculamos a matriz jacobiana desta transformação:

$$(\Psi \circ \phi^{-1})'(q) = \left[\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline * & \frac{\partial(\Psi^j \circ \phi^{-1})}{\partial x^i}(q) \end{array}\right],$$

onde I_r é a matriz identidade $r \times r$ e no canto inferior direito $i, j > r$. Como esta matriz tem rank precisamente r, concluímos que

$$\frac{\partial(\Psi^j \circ \phi^{-1})}{\partial x^i}(q) = 0, \text{ se } i, j > r.$$

Ou seja, as componentes $\Psi^j \circ \phi^{-1}$, para $j > r$, não dependem de $x^{r+1}, \ldots, x^d$:

$$\Psi^j \circ \phi^{-1}(x) = \Psi^j \circ \phi^{-1}(x^1, \ldots, x^r), \qquad \text{se } j > r.$$

Assim, se considerarmos a aplicação $\psi : \mathbb{R}^e \to \mathbb{R}^e$ dada por

$$\psi(y^1, \ldots, y^e) = (y^1, \ldots, y^r, y^{r+1} - \Psi^{r+1} \circ \phi^{-1}(y), \ldots, y^e - \Psi^e \circ \phi^{-1}(y)),$$

temos, por um lado, que ψ é um difeomorfismo numa vizinhança da origem, pois a sua matriz jacobiana é dada por

$$\psi'(0) = \left[\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline * & I_{e-r} \end{array}\right],$$

donde é não singular. Por outro lado, verificamos facilmente que

$$\psi \circ \Psi \circ \phi^{-1}(x^1, \ldots, x^d) = (x^1, \ldots, x^r, 0, \ldots, 0).$$

□

Um corolário imediato é que uma imersão de uma variedade de dimensão d numa variedade de dimensão e é, localmente, como a *inclusão* $\mathbb{R}^d \hookrightarrow \mathbb{R}^e$:

Corolário 3.3. *Se $\Psi : M \to N$ é uma imersão, então, para todo o $p \in M$, existem coordenadas locais $(U, \phi) = (U, x^1, \ldots, x^d)$ centradas em p e coordenadas locais $(V, \psi) = (V, y^1, \ldots, y^e)$ centradas em $\Psi(p)$, tais que:*

$$\psi \circ \Psi \circ \phi^{-1}(x^1, \ldots, x^d) = (x^1, \ldots, x^d, 0, \ldots, 0).$$

De igual forma, obtemos que uma submersão de uma variedade de dimensão d numa variedade de dimensão e é, localmente, como a *projecção* $\mathbb{R}^d \twoheadrightarrow \mathbb{R}^e$:

Corolário 3.4. *Se $\Psi : M \to N$ é uma submersão, então, para todo o $p \in M$, existem coordenadas locais $(U, \phi) = (U, x^1, \ldots, x^d)$ centradas em p e coordenadas locais $(V, \psi) = (V, y^1, \ldots, y^e)$ centradas em $\Psi(p)$, tais que:*

$$\psi \circ \Psi \circ \phi^{-1}(x^1, \ldots, x^d) = (x^1, \ldots, x^e).$$

Visto que uma étale não é mais que uma aplicação que é, simultaneamente, uma imersão e uma submersão, combinando estes dois resultados vemos que uma étale é a mesma coisa que um difeomorfismo local:

Corolário 3.5. *Se $\Psi : M \to N$ é uma étale, então, para todo o $p \in M$, existem existem coordenadas locais $(U, \phi) = (U, x^1, \ldots, x^d)$ centradas em p e coordenadas locais $(V, \psi) = (V, y^1, \ldots, y^d)$ centradas em $\Psi(p)$, tais que:*

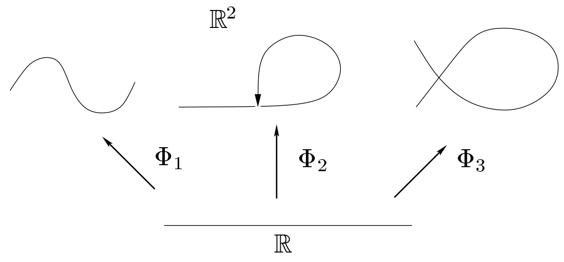
$$\psi \circ \Psi \circ \phi^{-1}(x^1, \ldots, x^d) = (x^1, \ldots, x^d).$$

Vejamos agora os sub-objectos da categoria diferenciável:

Definição 3.6. *Uma **subvariedade** de uma variedade M é um par (N, Φ), onde N é uma variedade e $\Phi : N \to M$ é uma imersão injectiva.*

Por vezes, usa-se o termo **subvariedade imersa** para acentuar que $\Phi : N \to M$ é uma imersão. Quando $\Phi : N \to M$ é um mergulho, i.e., quando $\Phi : N \to \Phi(N)$ é um homeomorfismo, onde em $\Phi(N) \subset M$ tomamos a topologia relativa, dizemos que (N, Φ) é uma **subvariedade mergulhada**.

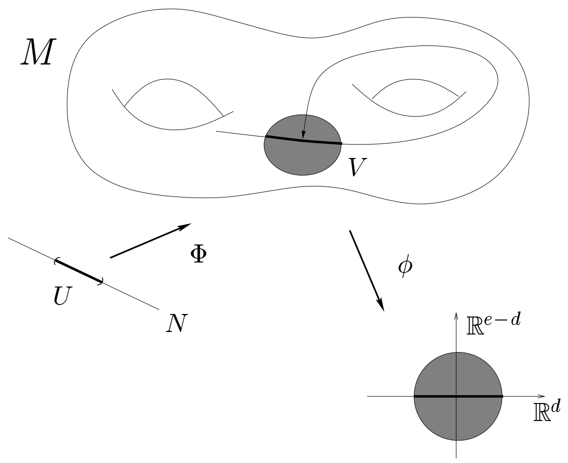
Exemplo 3.7.
A figura seguinte ilustra várias imersões de $N = \mathbb{R}$ em $M = \mathbb{R}^2$. Observe que $(\mathbb{R}, \Phi_1)$ é uma subvariedade mergulhada de $\mathbb{R}^2$, enquanto que $(\mathbb{R}, \Phi_2)$ é uma subvariedade imersa de $\mathbb{R}^2$. Por seu turno, Φ_3 é uma imersão que não é injectiva, logo $(\mathbb{R}, \Phi_3)$ não é uma subvariedade de $\mathbb{R}^2$.



A forma canónica para imersões (Corolário 3.3), implica imediatamente a

Proposição 3.8. *Seja (N, Φ) uma subvariedade de dimensão d de uma variedade M. Para todo o $p \in N$, existe um sistema de coordenadas local $(V, x^1, \dots, x^e)$ de M centrado em $\Phi(p)$, e uma vizinhança U de p, tal que*

$$\Phi(U) = \left\{ q \in V : x^{d+1}(q) = \cdots = x^e(q) = 0 \right\}.$$



Note-se que (na notação da proposição) em geral $\Phi(N) \cap V \neq \Phi(U)$, e portanto podem existir outros pontos em $\Phi(N) \cap V$ que *não pertencem* à fatia $\{q \in V : x^{d+1}(q) = \cdots = x^e(q) = 0\}$. No entanto, quando (N, Φ) é uma subvariedade mergulhada temos:

Corolário 3.9. *Seja (N,Φ) uma subvariedade mergulhada, de dimensão d, de uma variedade M. Para todo o $p \in N$, existe um sistema de coordenadas $(V, x^1, \ldots, x^e)$ de M centrado em $\Phi(p)$, tal que:*

$$\Phi(N) \cap V = \left\{ q \in V : x^{d+1}(q) = \cdots = x^e(q) = 0 \right\}.$$

Demonstração. Fixe-se $p \in N$ e escolha-se um sistema de coordenadas $(V', x^1, \ldots, x^e)$ em $\Phi(p)$ e uma vizinhança U de p como na proposição. Como (N, Φ) é uma subvariedade mergulhada, $\Phi(U)$ é um aberto de $\Phi(N)$ para a topologia relativa, logo existe um aberto $V'' \subset M$ tal que $\Phi(U) = V' \cap \Phi(N)$. Tomando $V = V' \cap V''$ e as restrições de x^i a V, obtemos um sistema de coordenadas $(V, x^1, \ldots, x^e)$ tal que:

$$\Phi(N) \cap V = \left\{ q \in V : x^{d+1}(q) = \cdots = x^e(q) = 0 \right\}.$$

□

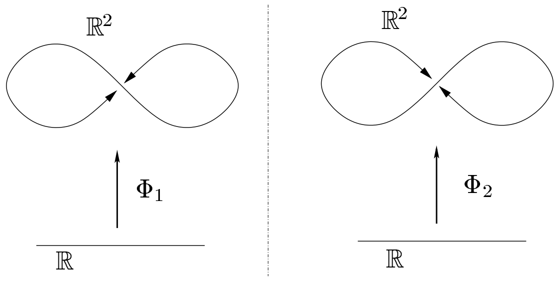
Se (N, Φ) é uma subvariedade de M e $\Psi : P \to M$ é uma aplicação diferenciável tal que $\Psi(P) \subset \Phi(N)$, então, como Φ é injectiva, Ψ factoriza-se por uma aplicação $\hat{\Psi} : P \to N$, i.e., temos o diagrama comutativo:

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, "\Psi"] \arrow[dr, dashed, "\hat{\Psi}"'] & M \\ & N \arrow[u, "\Phi"'] \end{tikzcd}$$

Em geral, a aplicação $\hat{\Psi}$ *não é* diferenciável.

Exemplo 3.10.

Considere as seguintes duas imersões injectivas $\Phi_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $i = 1, 2$, cujas imagens em $\mathbb{R}^2$ coincidem (o oito deitado):



Como $\Phi_1(\mathbb{R}) = \Phi_2(\mathbb{R})$, temos aplicações induzidas $\hat{\Phi}_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $\hat{\Phi}_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. É fácil verificar que $\hat{\Phi}_1$ e $\hat{\Phi}_2$ não são contínuas, logo não são diferenciáveis.

A proposição seguinte mostra que o que pode falhar é precisamente a continuidade:

Proposição 3.11. *Seja (N,Φ) uma subvariedade de M, $\Psi : P \to M$ uma aplicação diferenciável tal que $\Psi(P) \subset \Phi(N)$, e $\hat{\Psi} : P \to N$ a aplicação induzida.*

(i) Se $\hat{\Psi}$ é contínua então é diferenciável.

(ii) Se Φ é um mergulho então $\hat{\Psi}$ é contínua (logo diferenciável).

Demonstração. Suponha-se que $\hat{\Psi}$ é contínua. Para todo o $p \in N$, escolhemos $U \subset N$ e $(V,\phi) = (V, x^1, \ldots, x^e)$ como na Proposição 3.8, e definimos a aplicação diferenciável $\psi = \pi \circ \phi \circ \Phi : U \to \mathbb{R}^d$, onde $\pi : \mathbb{R}^e \to \mathbb{R}^d$ é a projecção $(x^1, \ldots, x^e) \mapsto (x^1, \ldots, x^d)$. O par (U,ψ) é um sistema de coordenadas de N centrado em p. Por outro lado, vemos que

$$\psi \circ \hat{\Psi} = \pi \circ \phi \circ \Phi \circ \hat{\Psi} = \pi \circ \phi \circ \Psi,$$

é diferenciável no aberto $\hat{\Psi}^{-1}(U)$. Como os abertos $\hat{\Psi}^{-1}(U)$ cobrem P, concluímos que $\hat{\Psi}$ é diferenciável, e que (i) se verifica.

Se Φ é um mergulho, então todo o aberto $U \subset N$ é da forma $\Phi^{-1}(V)$, onde $V \subset M$ é um aberto. Assim, $\hat{\Psi}^{-1}(U) = \hat{\Psi}^{-1}(\Phi^{-1}(V)) = \Psi^{-1}(V)$ é aberto. Concluímos pois que $\hat{\Psi}$ é contínua e que (ii) também se verifica. □

Estes comentários justificam a seguinte definição:

Definição 3.12. *Uma **subvariedade inicial** de M é uma subvariedade (N,Φ) tal que toda a aplicação diferenciável $\Psi : P \to M$ com $\Psi(P) \subset \Phi(N)$ factoriza-se por uma aplicação $\hat{\Psi} : P \to N$ diferenciável:*

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, "\Psi"] \arrow[dr, dashed, "\hat{\Psi}"'] & M \\ & N \arrow[u, "\Phi"'] \end{tikzcd}$$

Existem subvariedades iniciais, que não são mergulhadas. Deixamos aqui um exemplo simples, e veremos outros exemplos importantes mais tarde.

Exemplo 3.13.

No 2-toro $\mathbb{T}^2 = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ temos uma família de subvariedades $(\mathbb{R}, \Phi_a)$, dependendo de um parâmetro $a \in \mathbb{R}$, definidas por:

$$\Phi_a(t) = (e^{it}, e^{iat}).$$

Se $a = m/n$ é racional esta curva é fechada e, portanto, é uma variedade mergulhada (uma espiral fechada que dá m voltas na direcção de um dos ciclos geradores e n voltas na direcção do outro ciclo).

Se a é irracional, esta curva é densa no toro, logo é uma variedade imersa. Neste caso, dada uma aplicação $\hat{\Psi} : P \to \mathbb{R}$, tal que a composta $\Phi_a \circ \hat{\Psi}$ é C^∞, vemos imediatamente que $\hat{\Psi} : P \to \mathbb{R}$ é contínua. Pela Proposição 3.11, concluímos que $\hat{\Psi}$ é C^∞. Assim, (N, Φ_a) é uma variedade inicial.

Quando pensamos numa subvariedade de M pensamos usualmente num subconjunto de M. Para justificar até que ponto isto é válido, introduzimos a seguinte relação de equivalência:

Definição 3.14. *Dizemos que* (N_1, Φ_1) *e* (N_2, Φ_2) *são* ***subvariedades equivalentes*** *de* M *se existir um difeomorfismo* $\Psi : N_1 \to N_2$ *tal que o diagrama seguinte comuta:*

$$\begin{tikzcd} N_1 \arrow[r, "\Phi_1"] \arrow[dr, dashed, "\Psi"'] & M \\ & N_2 \arrow[u, "\Phi_2"'] \end{tikzcd}$$

Se (N, Φ) é uma subvariedade de M, podemos considerar $\Phi(N) \subset M$ com a única estrutura de variedade, tal que $\hat{\Phi} : N \to \Phi(N)$ é um difeomorfismo. Para esta estrutura diferenciável em $\Phi(N)$, a inclusão $i : \Phi(N) \hookrightarrow M$ é uma imersão injectiva, e o diagrama seguinte comuta

$$\begin{tikzcd} N \arrow[r, "\Phi"] \arrow[dr, "\hat{\Phi}"'] & M \\ & \Phi(N) \arrow[u, "i"'] \end{tikzcd}$$

Assim, toda a subvariedade (N, Φ) possui um único representante (A, i), onde $A \subset M$ é um subconjunto e $i : A \hookrightarrow M$ é a inclusão. Dizemos, então, que o subconjunto $A \subset M$ é uma subvariedade.

Exemplo 3.15.
Se $A \subset M$ *é um subconjunto, em geral, não existe uma estrutura diferenciável em* A*, tal que a inclusão* $i : A \hookrightarrow M$ *é uma imersão. É o que se passa, por exemplo, com o subconjunto* $A = \{(x, |x|) : x \in \mathbb{R}\}$ *de* $\mathbb{R}^2$ *(exercício).*

Por outro lado, se existir uma estrutura diferenciável em A*, tal que a inclusão* $i : A \hookrightarrow M$ *é uma imersão, ela pode não ser única. É o que se passa, por exemplo, com o subconjunto de* $\mathbb{R}^2$ *em forma de oito do Exemplo 3.10.*

Proposição 3.16. *Seja* $A \subset M$ *um subconjunto de uma variedade diferenciável e* $i : A \hookrightarrow M$ *a inclusão. Então:*

(i) Fixada uma topologia em A*, existe no máximo uma estrutura diferenciável para esta topologia tal que* (A, i) *é uma subvariedade de* M*.*
(ii) Se, para a topologia relativa em A*, existe uma estrutura diferenciável tal que* (A, i) *é uma subvariedade de* M*, então esta é a única topologia em* A *para a qual existe uma estrutura diferenciável tal que* (A, i) *é uma subvariedade de* M*.*

Demonstração. Observe que (i) segue-se imediatamente da Proposição 3.11 (i). Por outro lado, para verificar (ii), seja (N, Φ) uma subvariedade com $\Phi(N) = A$, e considere-se o diagrama:

$$\begin{tikzcd} N \arrow[r, "\Phi"] \arrow[dr, "\hat{\Phi}"'] & M \\ & A \arrow[u, "i"'] \end{tikzcd}$$

Como A possui a topologia relativa, pela Proposição 3.11 (ii), $\hat{\Phi}$ é diferenciável. Assim, $\hat{\Phi}$ é uma imersão bijectiva, logo é um difeomorfismo (exercício). Concluímos que (N,Φ) é equivalente a (A,i), e (ii) segue-se. $\square$

Se (N,Φ) é uma subvariedade de M, então, para qualquer $p \in N$, a aplicação $\mathrm{d}_p\Phi : T_pN \to T_{\Phi(p)}M$ é injectiva. Assim, podemos identificar o espaço tangente T_pN com a imagem $\mathrm{d}_p\Phi(T_pN)$, que é um subespaço de $T_{\Phi(p)}M$. Daqui em diante usamos esta identificação, de forma que T_pN será sempre visto como um subespaço de $T_{\Phi(p)}M$.

Exercícios.

1. Mostre que o conjunto $\{(x,|x|) : x \in \mathbb{R}\}$ *não* é a imagem de uma imersão $\Phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$.

2. Mostre que existe um difeomorfismo $\Psi : T\mathbb{S}^3 \to \mathbb{S}^3 \times \mathbb{R}^3$, que torna o seguinte diagrama comutativo:

$$\begin{tikzcd}
T\mathbb{S}^3 \arrow[rr, "\Psi"] \arrow[dr, "\pi"'] & & \mathbb{S}^3 \times \mathbb{R}^3 \arrow[dl, "\tau"] \\
& \mathbb{S}^3 &
\end{tikzcd}$$

onde $\tau : \mathbb{S}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{S}^3$ é a projecção no primeiro factor, e tal que a restrição $\Psi : T_p\mathbb{S}^3 \to \mathbb{R}^3$ é linear.

3. Seja $\{y^1, \ldots, y^e\}$ um conjunto de funções diferenciáveis de uma variedade M. Mostre que:
   (a) Se $\{\mathrm{d}_py^1, \ldots, \mathrm{d}_py^e\} \subset T_p^*M$ é linearmente independente, então as funções $\{y^1, \ldots, y^e\}$ são parte de um sistema de coordenadas em p.
   (b) Se $\{\mathrm{d}_py^1, \ldots, \mathrm{d}_py^e\} \subset T_p^*M$ é um conjunto gerador, então um subconjunto de $\{y^1, \ldots, y^e\}$ é um sistema de coordenadas em p.
   (c) Se $\{\mathrm{d}_py^1, \ldots, \mathrm{d}_py^e\} \subset T_p^*M$ é uma base, então as funções $\{y^1, \ldots, y^e\}$ formam um sistema de coordenadas numa vizinhança de p.

4. Mostre que uma submersão é uma aplicação aberta. O que pode dizer sobre uma imersão?

5. Seja $\Phi : \mathbb{P}^2 \to \mathbb{R}^3$ a aplicação definida por

$$\Phi([x,y,z]) = \frac{1}{x^2+y^2+z^2}(yz, xz, xy).$$

Mostre que Φ é uma aplicação diferenciável e verifique que é uma imersão, excepto em exactamente 6 pontos. Esboce a imagem de Φ.

6. Seja M uma variedade, $A \subset M$, e $i : A \hookrightarrow M$ a inclusão canónica. Mostre que (A,i) é uma subvariedade de M, mergulhada, de dimensão d sse, para cada $p \in A$, existe um sistema de coordenadas $(U, x^1, \ldots, x^e)$ centrado em p tal que

$$A \cap U = \{p \in A : x^{d+1}(p) = \cdots = x^e(p) = 0\}.$$

7. Mostre que um subconjunto $M \subset \mathbb{R}^n$ é uma k-superfície sse é uma subvariedade mergulhada.

8. Dizemos que um subconjunto S de uma variedade M tem **medida nula** se, para todo o sistema de coordenadas (U, ϕ) de M, o conjunto $\phi(S \cap U) \subset \mathbb{R}^d$ tem medida nula. Mostre que, se $\Phi : N \to M$ é uma imersão, então:
(a)Φ leva conjuntos de medida nula em conjuntos de medida nula;
(b)Se $\dim N < \dim M$ então $\Phi(N)$ tem medida nula.

9. Mostre que, se (N, Φ) é uma subvariedade de M, com $\Phi : N \to M$ uma aplicação própria (i.e., $\Phi^{-1}(K) \subset N$ é compacto, sempre que $K \subset M$ é compacto), então N é uma subvariedade mergulhada. Conclua que se N é compacta, então N é uma subvariedade mergulhada.

10. Mostre que uma imersão bijectiva $\Phi : N \to M$ é um difeomorfismo. Se N não possui uma base contável, mostre que isto pode ser falso.

11. Seja $\pi : \widetilde{M} \to M$ um revestimento de uma variedade diferenciável M. Mostre que existe uma única estrutura de variedade diferenciável em $\widetilde{M}$ para a qual a aplicação de revestimento é um difeomorfismo local.

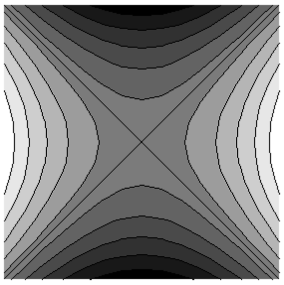
Lição 4. Mergulhos e o Teorema de Whitney

Definição 4.1. *Seja $\Psi : M \to N$ uma aplicação diferenciável.*
*(i) $p \in M$ diz-se **ponto regular** de Ψ se $\mathrm{d}_p\Psi : T_pM \to T_{\Psi(p)}N$ é sobrejectiva. Caso contrário, dizemos que p é **ponto singular** de Ψ;*
*(ii) $q \in N$ diz-se **valor regular** de Ψ se todo o $p \in \Psi^{-1}(q)$ é um ponto regular. Caso contrário, dizemos que q é **valor singular** de Ψ.*

O seguinte exemplo justifica o uso dos termos "regular" e "singular".

Exemplo 4.2.
Considere a aplicação $\Psi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por:
$$\Phi(x, y) = x^2 - y^2.$$
A matriz jacobiana desta aplicação é dada por:
$$\Phi(x, y)' = [2x \ 2y].$$
Os pontos $(x, y) \neq (0, 0)$ são pontos regulares de ϕ, enquanto que $(0, 0)$ é um ponto singular. Portanto, 0 é um valor singular de Φ e todos os outros valores são regulares.

Se considerarmos um valor regular $c \neq 0$, o conjunto de nível $\Phi^{-1}(c)$ é uma subvariedade de $\mathbb{R}^2$ (uma hipérbole). Por outro lado, para o valor singular 0, vemos que $\Phi^{-1}(0)$ é a união das duas rectas $x = \pm y$, que não é uma variedade (na origem $(0, 0)$ as rectas cruzam-se).



De facto, para valores regulares, os conjuntos de nível são sempre subvariedades:

Teorema 4.3. *Seja* $\Psi : M \to N$ *uma aplicação diferenciável e* $q \in N$ *um valor regular. Então* $\Psi^{-1}(q) \subset M$ *é uma subvariedade mergulhada de dimensão* $\dim M - \dim N$.

Demonstração. Se $q \in N$ é um valor regular de Ψ, então existe um aberto $\Psi^{-1}(q) \subset O \subset M$ tal que $\Psi|_O$ é uma submersão. Assim, para qualquer $p \in \Phi^{-1}(q)$, existem coordenadas $(U, x^1, \dots, x^d)$ em p e coordenadas $(V, y^1, \dots, y^e)$ em q, tais que nestas coordenadas Ψ é representada pela projecção

$$\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^e : \ (x^1, \dots, x^d) \mapsto (x^1, \dots, x^e).$$

Temos então que

$$\Psi^{-1}(q) \cap U = \left\{p \in U : x^1(p) = \dots = x^e(p) = 0\right\}.$$

Assim, por um exercício da Lição 4, $\Psi^{-1}(q)$ é uma subvariedade mergulhada de dimensão $d - e = \dim M - \dim N$. □

Se $N \subset M$ é uma subvariedade, chamamos **codimensão** de N ao inteiro $\dim M - \dim N$. Se pensarmos num conjunto com um só ponto como uma variedade de dimensão 0, o resultado anterior afirma que, se q é um valor regular de Ψ, então $\Psi^{-1}(q)$ é uma subvariedade mergulhada com $\operatorname{codim} \Psi^{-1}(q) = \operatorname{codim} \{q\}$. Este resultado admite a seguinte generalização:

Teorema 4.4. *Seja* $\Psi : M \to N$ *uma aplicação diferenciável e* $Q \subset N$ *uma subvariedade mergulhada. Suponha-se que, para todo o* $p \in \Psi^{-1}(Q)$, *verifica-se*

$$\operatorname{Im} \mathrm{d}_p\Psi + T_{\Psi(p)}Q = T_{\Psi(p)}N. \tag{4.1}$$

Então $\Psi^{-1}(Q) \subset M$ *é uma subvariedade mergulhada e* $\operatorname{codim} \Psi^{-1}(Q) = \operatorname{codim} Q$.

Demonstração. Seja $p_0 \in \Psi^{-1}(Q)$ e $q_0 = \Psi(p_0)$. Como $Q \subset N$ é uma subvariedade mergulhada, existem coordenadas $(V, y^1, \dots, y^d)$ para N em q_0, tais que

$$Q \cap V = \left\{q \in V : y^{l+1}(q) = \dots = y^d(q) = 0\right\},$$

onde $l = \dim Q$. Considere-se a aplicação $\Phi : \Psi^{-1}(V) \to \mathbb{R}^{d-l}$ dada por

$$\Phi = (y^{l+1} \circ \Psi, \dots, y^d \circ \Psi).$$

Temos que $U = \Psi^{-1}(V)$ é um aberto de M contendo p_0 e $\Psi^{-1}(Q) \cap U = \Phi^{-1}(0)$. Se verificarmos que 0 é um valor regular de Φ, então segue-se que, para todo o $p_0 \in \Psi^{-1}(Q)$, existe um aberto $U \subset M$ tal que $\Psi^{-1}(Q) \cap U$ é uma subvariedade mergulhada de M, com codimensão $d - l = \operatorname{codim} Q$. Isto mostra que $\Psi^{-1}(Q)$ é uma subvariedade mergulhada de M.

Observe-se que $\Phi = \pi \circ \Psi$, onde $\pi : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^{d-l}$ é a projecção nas últimas $d - l$ componentes. É claro que π é uma submersão, e que $\ker d_q\pi = T_qQ$, para $q \in Q \cap V$. Por (4.1), segue-se que $\mathrm{d}_p\Phi = d_{\Psi(p)}\pi \cdot \mathrm{d}_p\Psi$ é sobrejectiva, para todo o $p \in \Psi^{-1}(Q) \cap U = \Phi^{-1}(0)$, i.e., 0 é um valor regular de Φ. □

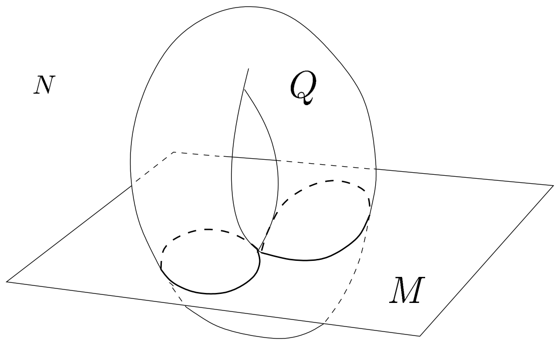
Quando a condição (4.1) é satisfeita, dizemos que Ψ é **transversal** à subvariedade $Q \subset N$, e escrevemos $\Psi \pitchfork Q$. Um caso especial que justifica este nome, é o caso em que $M \subset N$ é uma subvariedade e $\Psi : M \hookrightarrow N$ é a inclusão. Neste caso, $\Psi^{-1}(Q) = M \cap Q$ é a intersecção das duas subvariedades, e a condição de transversalidade reduz-se a

$$T_qM + T_qQ = T_qN, \quad \forall q \in M \cap Q.$$

Em vez de $\Psi \pitchfork Q$ escrevemos $M \pitchfork Q$. Se esta condição se verifica, então $M \cap Q$ é uma subvariedade e

$$\dim M \cap Q = \dim M + \dim Q - \dim N.$$

Por outro lado, quando a intersecção não é transversal, em geral, $M \cap Q$ não é uma variedade, como se ilustra na figura seguinte.



Exemplos 4.5.

1. Seja $M = \mathbb{R}^{d+1}$ e $\Psi : \mathbb{R}^{d+1} \to \mathbb{R}$ a aplicação:

$$\Psi(x) = ||x||^2.$$

A matriz jacobiana de Ψ é dada por

$$\Psi'(x) = [2x^1, \ldots, 2x^{d+1}].$$

Como $\Psi'(x)$ tem rank 1, se $||x|| > 0$, concluímos que todo o $c = R^2 > 0$ é um valor regular de Ψ, e que a esfera $\mathbb{S}^d = \Psi^{-1}(R)$ é uma subvariedade mergulhada de $\mathbb{R}^{d+1}$.

Note que, para a estrutura diferenciável em $\mathbb{S}^d$ definida na Lição 1, $\mathbb{S}^d$ também é uma subvariedade de $\mathbb{R}^{d+1}$. Logo, essa estrutura diferencial coincide necessariamente com esta.

2. Seja $M = \mathbb{S} \times \mathbb{R}$ um cilindro. Podemos mergulhar M em $\mathbb{R}^3$ da seguinte forma: tomamos a aplicação $\Phi : M \to \mathbb{R}^3$ definida por:

$$\Phi(\theta, t) = (R\cos\theta, R\,\mathrm{sen}\,\theta, t),$$

onde identificamos $\mathbb{S} = [0, 2\pi]/2\pi\mathbb{Z}$. Esta aplicação é injectiva, e a matriz jacobiana $\Phi'(\theta, t)$ tem rank 2, logo Φ é uma imersão injectiva.

A imagem de Φ é o conjunto

$$\left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = R^2\right\} = \Psi^{-1}(c),$$

onde $c = R^2$ e $\Psi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ é a aplicação diferenciável

$$\Psi(x, y, z) = x^2 + y^2.$$

Como $\Psi'(x,y,z) = [2x, 2y, 0] \neq 0$ *se* $x^2 + y^2 = c \neq 0$, *concluímos que todo o* $c \neq 0$ *é um valor regular de* Ψ. *Assim, o cilindro* $\mathbb{S} \times \mathbb{R}$ *é uma variedade que pode ser mergulhada em* $\mathbb{R}^3$.

3. Tal como no exemplo anterior, o 2-toro $M = \mathbb{S} \times \mathbb{S}$ *também pode ser mergulhado em* $\mathbb{R}^3$*: identificamos* $\mathbb{S} \times \mathbb{S} = [0, 2\pi]/2\pi\mathbb{Z} \times [0, 2\pi]/2\pi\mathbb{Z}$ *e definimos uma aplicação* $\Phi : M \to \mathbb{R}^3$ *por:*

$$\Phi(\theta, \phi) = ((R + r\cos\phi)\cos\theta, (R + r\cos\phi)\operatorname{sen}\theta, r\operatorname{sen}\phi).$$

É fácil de ver que, se $R > r > 0$, *então* Φ *é uma imersão injectiva cuja imagem é o subconjunto de* $\mathbb{R}^3$

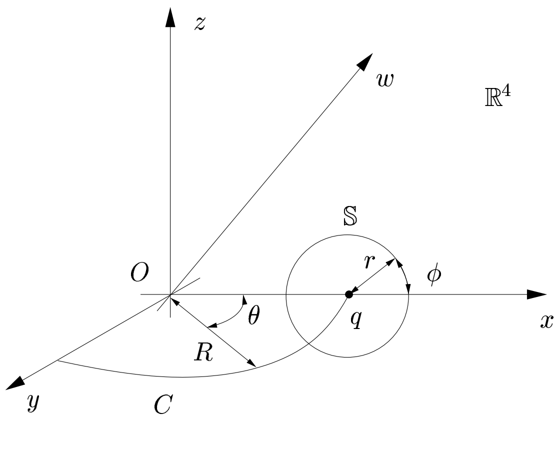
$$\left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x^2 + y^2 + z^2 - R^2 - r^2)^2 + 4R^2z^2 = 4R^2r^2\right\} = \Psi^{-1}(c),$$

onde $c = 4R^2r^2$ *e* $\Psi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ *é a aplicação diferenciável*

$$\Psi(x,y,z) = (x^2 + y^2 + z^2 - R^2 - r^2)^2 + 4R^2z^2.$$

Deixamos como exercício verificar que todo o $c \neq 0$ *é um valor regular desta aplicação. Portanto, o 2-toro* $\mathbb{S} \times \mathbb{S}$ *é uma variedade que pode ser mergulhada em* $\mathbb{R}^3$.

4. A ***garrafa de Klein*** *é o subconjunto* $K \subset \mathbb{R}^4$ *definido da seguinte forma: Sejam* Ox, Oy, Oz, *e* Ow, *os quatro eixos de coordenadas em* $\mathbb{R}^4$, *e designe por* C *uma circunferência de raio* R *no plano* xOy. *Seja ainda* θ *o ângulo nesta circunferência, contado a partir do eixo* Ox.



Considerando uma circunferência $\mathbb{S}$ *no plano* xOz, *de raio* r *e com centro* q *em* C, K *é obtida rodando esta circunferência em torno do eixo* Oz *de forma que, quando o seu centro* $q \in C$ *rodou de um ângulo* θ, *o plano de* $\mathbb{S}$ *rodou em torno do eixo* Oq *no 3-espaço* $OqOzOw$ *de um ângulo* $\theta/2$. *Designamos por* ϕ *o ângulo na circunferência* $\mathbb{S}$, *medido a partir do eixo* Oq.

Observe-se que os pontos de K *com* $\theta \neq 0$ *e* $\phi \neq 0$ *são parametrizados pela aplicação* $\Phi_1 :]0, 2\pi[\times]0, 2\pi[\to \mathbb{R}^4$*:*

$$\Phi_1(\theta, \phi) = ((R + r\cos\phi)\cos\theta, (R + r\cos\phi)\operatorname{sen}\theta, r\operatorname{sen}\phi\cos\theta/2, r\operatorname{sen}\phi\operatorname{sen}\theta/2).$$

Mudando a origem a θ *e a* ϕ, *obtemos outras parametrizações que cobrem os pontos que ficaram de fora. Deixamos como exercício verificar que três parametrizações* Φ_1, Φ_2 *e* Φ_3 *bastam. Para estas parametrizações, as composições* $\Phi_i \circ \Phi_j^{-1}$ *são aplicações* C^∞, *logo* K *é uma 2-superfície em* $\mathbb{R}^4$.

De forma análoga ao 2-toro, verificamos ainda que K é dada por:

$$K = \Psi^{-1}(c, 0),$$

onde $c = 4R^2r^2$ e $\Psi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ é a aplicação diferenciável

$$\Psi(x, y, z) = ((x^2 + y^2 + z^2 + w^2 - R^2 - r^2)^2 + 4R^2(z^2 + w^2), y(z^2 - w^2) - 2xzw).$$

Para $c \neq 0$, temos que $(c, 0)$ é um valor regular de Ψ, e concluímos que K é uma subvariedade mergulhada de $\mathbb{R}^4$.

Na verdade, qualquer variedade poder ser mergulhada num espaço euclidiano de dimensão suficientemente elevada.

Teorema 4.6 (Whitney)**.** *Seja M uma variedade compacta. Existe um mergulho injectivo $\Psi : M \to \mathbb{R}^m$, para algum inteiro m.*

Demonstração. Como M é compacta, podemos encontrar uma colecção finita de sistemas de coordenadas $\{(U_i, \phi_i) : i = 1, \ldots, N\}$ tais que:

(a) $\overline{B_1(0)} \subset \phi_i(U_i) \subset B_2(0)$;

(b) $\bigcup_{i=1}^N \phi_i^{-1}(B_1(0)) = M$.

Sejam $\lambda_i : M \to \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, N$, funções em $C^\infty(M)$ tais que

$$\lambda_i(p) = \begin{cases} 1 \text{ se } p \in \phi_i^{-1}(B_1(0)), \\ \\ 0 \text{ se } p \notin U_i. \end{cases}$$

Definam-se, ainda, aplicações diferenciáveis $\psi_i : M \to \mathbb{R}^d$, $i = 1, \ldots, N$, por:

$$\psi_i(p) = \begin{cases} \lambda_i \phi_i(p) \text{ se } p \in U_i, \\ \\ 0 \text{ se } p \notin U_i. \end{cases}$$

A aplicação $\Phi : M \to \mathbb{R}^{Nd+N}$ dada por

$$\Phi(p) = (\psi_1(p), \lambda_1(p), \ldots, \psi_N(p), \lambda_N(p))$$

é o mergulho procurado. De facto, temos que:

(i) Φ é uma imersão: Se $p \in M$, então $p \in \phi_i^{-1}(B_1(0))$, para algum i. Temos, pois, que $\psi_i = \phi_i$ numa vizinhança de p, logo $\mathrm{d}_p\psi_i = \mathrm{d}_p\phi_i$ é injectivo. Isto mostra que $\mathrm{d}_p\Phi$ é injectivo.

(ii) Φ é injectivo: Sejam $p, q \in M$, com $p \neq q$, e seja i tal que $p \in \lambda_i^{-1}(1)$. Se $q \notin \lambda_i^{-1}(1)$, então $\lambda_i(p) \neq \lambda_i(q)$ e, também, $\Phi(p) \neq \Phi(q)$. Por outro lado, se $q \in \lambda_i^{-1}(1)$, então $\psi_i(p) = \phi_i(p) \neq \phi_i(q) = \psi_i(q)$, pois ϕ_i é injectiva. Em todo o caso, $\Phi(p) \neq \Phi(q)$, logo Φ é injectiva.

Como M é compacta, concluímos que Φ é um mergulho.

□

O resultado anterior é apenas a versão mais fraca dos resultados de Whitney. Ele mostrou que toda a variedade diferenciável (compacta ou não) de dimensão d pode ser mergulhada em $\mathbb{R}^{2d}$. A dimensão $2d$ é a menor possível, pois há variedades de dimensão $2d$ que não podem ser mergulhadas em $\mathbb{R}^{2d-1}$. Por outro lado, para $d > 1$, Whitney também mostrou que toda a variedade diferenciável de dimensão d pode ser *imersa* em $\mathbb{R}^{2d-1}$.

Exercícios.

1. Seja $O(n) = \left\{A : AA^T = I\right\}$ o conjunto das matrizes $n \times n$ ortogonais. Mostre que $O(n)$ é uma subvariedade mergulhada do espaço das matrizes $n \times n$. Verifique que o espaço tangente $T_I O(n)$, onde I designa a matriz identidade, pode ser identificado com o espaço das matrizes $n \times n$ anti-simétricas.

2. Seja $\Phi : \mathbb{P}^2 \to \mathbb{R}^4$ a aplicação definida por

$$\Phi([x, y, z]) = \frac{1}{x^2 + y^2 + z^2}(x^2 - z^2, yz, xz, xy).$$

Mostre que $(\mathbb{P}^2, \Phi)$ é uma subvariedade mergulhada de $\mathbb{R}^4$.

3. Complete os detalhes do exemplo da garrafa de Klein, e verifique que K é uma 2-superfície em $\mathbb{R}^4$.

4. Seja $\Psi : M \to N$ uma aplicação diferenciável e $q \in N$ um valor regular. Mostre que

$$T_p \Psi^{-1}(q) = \{\mathbf{v} \in T_p M : \mathrm{d}_p \Psi \cdot \mathbf{v} = 0\}.$$

5. Seja $\Psi : M \to N$ uma aplicação diferenciável, transversal a uma subvariedade $Q \subset N$ (não necessariamente mergulhada). Mostre que $\Psi^{-1}(Q)$ é uma subvariedade de M (não necessariamente mergulhada) e que

$$T_p \Psi^{-1}(Q) = \left\{\mathbf{v} \in T_p M : \mathrm{d}_p \Psi \cdot \mathbf{v} \in T_{\Psi(p)} Q\right\}.$$

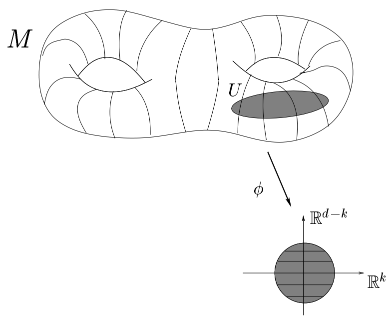
6. Mostre a seguinte versão fraca do **Teorema de Sard**: Seja $\Psi : M \to N$ uma aplicação diferenciável entre variedades da mesma dimensão. O conjunto dos valores críticos de Ψ tem medida nula.

Lição 5. Folheações

Uma folheação é uma decomposição de uma variedade em subvariedades:

Definição 5.1. *Seja M uma variedade de dimensão d. Uma **folheação** de dimensão k de M é uma decomposição $\{L_\alpha : \alpha \in A\}$ de M em conjuntos conexos por arcos disjuntos, que satisfaz a seguinte propriedade: para todo o $p \in M$, existe uma carta $\phi = (x^1, \dots, x^k, y^1, \dots, y^{d-k}) : U \to \mathbb{R}^d = \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{d-k}$, tal que as componentes conexas de $L_\alpha \cap U$ são os conjuntos da forma*

$$\{p \in U : y^1(p) = const., \dots, y^{d-k}(p) = const.\}.$$



Vamos designar uma folheação por $\mathcal{F} = \{L_\alpha : \alpha \in A\}$. Aos conjuntos conexos por arcos L_α chamamos **folhas**. Um sistema de coordenadas (U, ϕ) com a propriedade da definição diz-se **distinguido**. As componentes conexas de $U \cap L_\alpha$ chamam-se **placas**.

Um **caminho de placas** é uma colecção de placas $P_1, \ldots, P_l$ tal que $P_i \cap P_{i+1} \neq \emptyset$, para todo o $i = 1, \ldots, l-1$. É fácil de ver que dois pontos $p, q \in M$ pertencem à mesma folha sse existe um caminho de placas $P_1, \ldots, P_l$, com $p \in P_1$ e $q \in P_l$.

Cada folha de uma folheação k-dimensional de M, é uma subvariedade de M de dimensão k. Em geral, as folhas não são mergulhadas: uma folha pode intersectar um número infinito de vezes um domínio de coordenadas U, e acumular sobre si própria. Antes de verificarmos estes factos, vejamos alguns exemplos.

Exemplos 5.2.

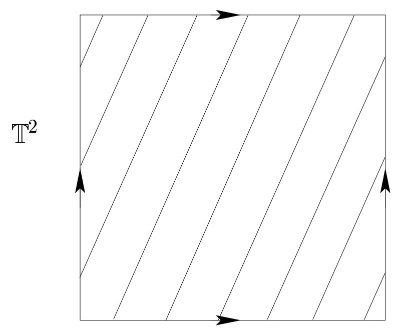
1. Seja $\Phi : M \to N$ uma submersão. Pela forma local das submersões, as componentes conexas de $\Phi^{-1}(q)$, onde $q \in N$, formam uma folheação de M. Esta folheação tem codimensão igual à dimensão de N. Neste caso, as folhas são todas variedades mergulhadas.

2. Em $M = \mathbb{R}^2$, fixando $a \in \mathbb{R}$, podemos considerar a folheação pelas rectas de declive a. Este é um caso especial do Exemplo 1, pois esta folheação é obtida a partir da submersão $\Phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, dada por:

$$\Phi(x, y) = y - ax.$$

Neste exemplo, as folhas são todas mergulhadas.

3. Consideremos o toro $\mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$. A folheação do Exemplo 2, induz uma folheação de $\mathbb{T}^2$. Se $a \in \mathbb{Q}$, as folhas são curvas fechadas, sendo, pois, variedades mergulhadas. No entanto, se $a \notin \mathbb{Q}$, as folhas são curvas densas no toro, sendo apenas variedades imersas.



4. Seja $\Phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ a aplicação

$$\Phi(x, y, z) = f(x^2 + y^2)e^z,$$

onde $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ é uma função tal que $f(0) = 1$, $f(1) = 0$ e $f'(t) \leq 0$. Esta aplicação é uma submersão que determina uma folheação $\mathcal{F}$ de $\mathbb{R}^3$, com dois tipos de folhas:

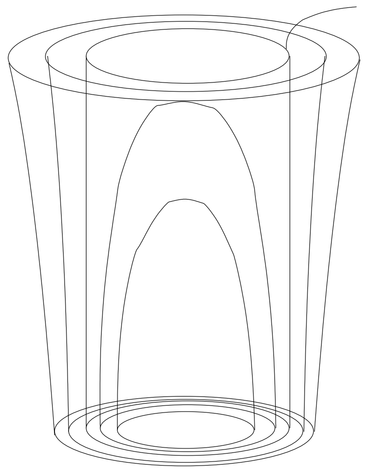
- *As folhas no interior do cilindro $C = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 = 1\}$ são difeomorfas a $\mathbb{R}^2$;*

•*As folhas no exterior do cilindro* C *são todas difeomorfas a* C*;*
•C *é uma folha de* $\mathcal{F}$*.*

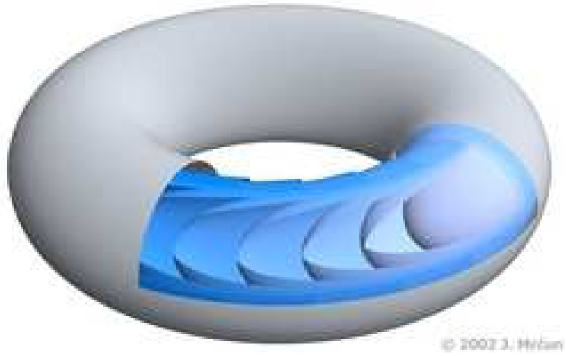
Uma parametrização explícita das folhas é dada por:

$$(x, y) \mapsto (x, y, \log(c/f(x^2 + y^2)),$$

com c é uma constante. No primeiro caso, $c > 0$ *e* $x^2 + y^2 \leq 1$*, enquanto no segundo caso,* $c < 0$ *e* $x^2 + y^2 > 1$*.*



5. A folheação do exemplo anterior é invariante por translações ao longo do eixo Oz*. Assim, identificando* $\mathbb{R}^3 = \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$*, obtemos uma folheação no quociente* $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{S}^1 = \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}/\mathbb{Z}$*. Restringindo esta folheação a* $D^2 \times \mathbb{S}^1$*, onde* $D^2 = \{(x, y) : x^2 + y^2 < 1\}$*, obtemos uma folheação de um toro sólido de dimensão dois.*



A esfera de dimensão 3 pode ser obtida colando dois toros sólidos de dimensão 2 ao longo do seu bordo:

$$\mathbb{S}^3 = T_1 \cup_\Phi T_2,$$

onde $\Phi : \partial T_1 \to \partial T_2$ *é um difeomorfismo que leva meridianos de* ∂T_1 *em paralelos de* ∂T_2*, e vice-versa. Explicitamente, se* $\mathbb{S}^3 = \{(x, y, z, w) : x^2 + y^2 +$

$z^2 + w^2 = 1\}$*, então podemos tomar:*

$$T_1 = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{S}^3 : x^2 + y^2 \leq 1/2\},$$
$$T_2 = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{S}^3 : x^2 + y^2 \geq 1/2\}.$$

Cada um destes toros possui uma folheação de dimensão 2 como acima. Obtemos, então, uma folheação de dimensão 2 da esfera $\mathbb{S}^3$, que se chama ***folheação de Reeb*** *de $\mathbb{S}^3$.*

Proposição 5.3. *Seja $\mathcal{F}$ uma folheação k-dimensional de uma variedade M. Toda a folha $L \in \mathcal{F}$ é uma subvariedade inicial de dimensão k.*

Demonstração. Seja L uma folha de $\mathcal{F}$. A topologia de L é a topologia gerada pelas placas de L, i.e., as componentes conexas de $L \cap U$, onde U é um aberto distinguido. Para cada cada placa P, associada a um sistema de coordenadas distinguido $(U, \phi) = (U, x^1, \dots, x^k, y^1, \dots, y^{d-k})$, consideramos a aplicação $\psi : P \to \mathbb{R}^k$ definida pelas primeiras k-componentes:

$$\psi(p) = (x^1(p), \dots, x^k(p)).$$

Assim, L é um espaço localmente euclidiano, Hausdorff, e as funções de transição são claramente C^∞. Podemos, pois, considerar o atlas maximal que contém as cartas (U, ψ). Para verificar que L é uma variedade falta apenas mostrar que a sua topologia admite uma base contável. Para isso, recorremos ao seguinte lema:

Lema 5.4. *Seja L uma folha de $\mathcal{F}$ e $\{U_n : n \in \mathbb{Z}\}$ uma cobertura contável de M por abertos distinguidos. As placas de L nesta cobertura (i.e., as componentes conexas dos $L \cap U_n$, $n \in \mathbb{Z}$) são em número contável.*

Fixemos uma placa P_0 de L na cobertura $\{U_n : n \in \mathbb{Z}\}$. Se uma placa P' pertence a L então existe um caminho de placas $P_1, \dots, P_l$ na cobertura, que liga P' a P_0. Basta, pois, verificar que a colecção de caminhos de placas na cobertura é contável.

Para uma caminho de placas $P_1, \dots, P_l$ chamamos a l o comprimento do caminho. Vamos mostrar, por indução, que a colecção de caminhos de placas na cobertura, de comprimento menor ou igual a N, é contável:

- A colecção de caminhos de placas na cobertura de comprimento 1 contém um só elemento, logo é contável.
- Suponhamos que a colecção de caminhos de placas na cobertura, de comprimento menor que N, é contável. Seja $P_1, \dots, P_{N-1}$ um caminho de placas de comprimento $N-1$, que corresponde a abertos distinguidos $U_1, \dots, U_{N-1}$. Para obter um caminho de placas de comprimento N, tomamos um aberto distinguido $U_N \neq U_{N-1}$ e consideramos a placas P', componentes conexas de $L \cap U_N$, tais que a intersecção com P_{N-1} é não-nula. Ora, $(L \cap U_N) \cap P_{N-1} = U_N \cap P_{N-1}$ é uma cobertura aberta da placa P_{N-1}, logo possui um número contável de componentes. Assim, os P' são em número contável. Concluímos que a colecção de caminhos de placas na cobertura, de comprimento menor ou igual a N, é contável.

Deixamos como exercício verificar que as folhas são subvariedade iniciais. □

Observação 5.5. Uma consequência da proposição é que uma folha intersecta um aberto distinguido um número contável de vezes.

Vamos ver agora algumas caracterizações alternativas de folheações.

Seja $\mathcal{F} = \{L_\alpha : \alpha \in A\}$ uma folheação de M, de dimensão k. Se (U, ϕ) e (V, ψ) são sistemas de coordenadas distinguidos, então a transformação de coordenadas $\psi \circ \phi^{-1} : \phi(U \cap V) \to \psi(U \cap V)$, é da forma:

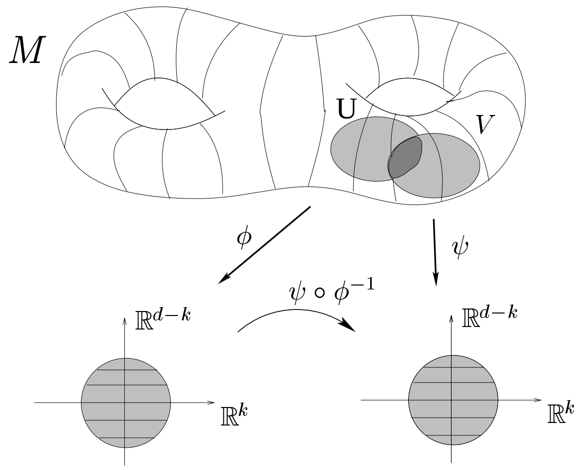
$$\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{d-k} \ni (x, y) \mapsto (h_1(x, y), h_2(y)) \in \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{d-k}.$$

Por outras palavras, é válida a relação:

$$\frac{\partial(\psi \circ \phi^{-1})^j}{\partial x^i} = 0, \quad (i = 1, \dots, k,\ j = k+1, \dots, d). \tag{5.1}$$

Reciprocamente, designemos por $\mathcal{G}_d^k$ os difeomorfismos locais $\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ que satisfazem esta condição. Podemos generalizar a noção de estrutura diferenciável requerendo que, na Definição 1.1, as funções de transição sejam elementos de $\mathcal{G}_d^k$. Obtemos, assim, a noção de **$\mathcal{G}_d^k$-estrutura diferenciável**. Temos a seguinte caracterização alternativa de folheação:

Proposição 5.6. *Seja M uma variedade diferenciável. Para toda a folheação $\mathcal{F} = \{L_\alpha : \alpha \in A\}$ de M, a colecção $\mathcal{C} = \{(U, \phi)\}$ dos sistemas de coordenadas distinguidos, define uma $\mathcal{G}_d^k$-estrutura diferenciável. Reciprocamente, para toda a $\mathcal{G}_d^k$-estrutura diferenciável $\mathcal{C}$ em M, existe uma única folheação $\mathcal{F}$ de M, para a qual os sistemas de coordenadas distinguidos são os elementos de $\mathcal{C}$.*



Demonstração. Já vimos que toda a folheação determina uma $\mathcal{G}_d^k$-estrutura diferenciável. Reciprocamente, dada uma $\mathcal{G}_d^k$-estrutura diferenciável $\mathcal{C} = \{(U, \phi)\}$, vamos associar-lhe uma folheação de M.

Para isso, consideramos as placas $\phi^{-1}(\mathbb{R}^k \times \{c\})$, onde $c \in \mathbb{R}^{d-k}$. Como M é coberta pelas placas, podemos definir a relação de equivalência em M:

- $p \sim q$ se existe um caminho de placas $P_1, \dots, P_l$ com $p \in P_1$ e $q \in P_l$.

Seja $\mathcal{F}$ o conjunto das classes de equivalência. Vamos verificar que $\mathcal{F}$ é uma folheação de M.

Seja $p_0 \in M$, e consideremos uma placa P_0 que contém p_0. Então

$$P_0 = \phi^{-1}(\mathbb{R}^k \times \{c_0\}),$$

para um sistema de coordenadas $(U, \phi) \in \mathcal{C}$, onde $\phi(p_0) = (a_0, c_0) \in \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{d-k}$. Vejamos que o sistema de coordenadas (U, ϕ) é um sistema de coordenadas distinguido: Seja $L \in \mathcal{F}$ uma classe de equivalência que intersecta U. Se $p \in U \cap L$, então $\phi(p) = (a, c) \in \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{d-k}$, e temos que a placa

$$P = \phi^{-1}(\mathbb{R}^k \times \{c\}),$$

está contida em L. Como P é conexa, é claro que P está contida na componente conexa de $L \cap U$ que contém p. Afirmamos que esta componente conexa é precisamente P, donde resulta que (U, ϕ) é um sistema de coordenadas distinguido.

Seja $q \in L \cap U$ um ponto da componente conexa que contém p. Vamos mostrar que $q \in P$. Por definição de $\sim$, existe um caminho de placas $P_1, \ldots, P_l$, com $p \in P_1$ e $q \in P_l$, e tal que $P_i \subset U$. A cada placa P_i está associado um sistema de coordenadas $(U_i, \phi_i) \in \mathcal{C}$, tal que

$$P_i = \phi_i^{-1}(\mathbb{R}^k \times \{c_i\}).$$

Podemos, ainda, assumir que $U_1 = U$, $\phi_1 = \phi$, $P_1 = P$ e $c_1 = c$. Como $\phi_2 \circ \phi^{-1} \in \mathcal{G}_d^k$, temos que:

$$\phi_2^{-1}(\mathbb{R}^k \times \{c_2\}) \subset \phi_2^{-1} \circ \phi_2 \circ \phi^{-1} \circ (\mathbb{R}^k \times \{\bar{c}_2\}) = \phi^{-1}(\mathbb{R}^k \times \{\bar{c}_2\}),$$

para algum $\bar{c}_2 \in \mathbb{R}^{d-k}$. Como $P_2 \cap P_1 \neq \emptyset$, e as placas $\phi^{-1} \circ (\mathbb{R}^k \times \{c\})$ são disjuntas, concluímos que $\bar{c}_2 = c_1$ e $P_2 \subset P_1 = P$. Por indução $P_i \subset P$, logo $q \in P$, como pretendido. $\square$

Vimos acima, que um exemplo muito simples de folheação é dada pelas componentes conexas das fibras de uma submersão. De facto, toda a folheação $\mathcal{F} = \{L_\alpha\}_{\alpha \in A}$ de M é, localmente, desta forma: para cada $p \in M$, podemos escolher um sistema de coordenadas distinguido

$$\phi = (x^1, \ldots, x^k, y^1, \ldots, y^{d-k}) : U \to \mathbb{R}^d,$$

e a projecção nas últimas $(d-k)$-componentes:

$$\psi = (y^1, \ldots, y^{d-k}) : U \to \mathbb{R}^{d-k},$$

é uma submersão, cujas fibras são as componentes conexas de $L_\alpha \cap U$. Observe que dado outro sistema de coordenadas distinguido

$$\bar{\phi} = (\bar{x}^1, \ldots, \bar{x}^k, \bar{y}^1, \ldots, \bar{y}^{d-k}) : \bar{U} \to \mathbb{R}^d,$$

com $U \cap \bar{U} \neq \emptyset$, temos uma nova submersão

$$\bar{\psi} = (\bar{y}^1, \ldots, \bar{y}^{d-k}) : \bar{U} \to \mathbb{R}^{d-k}.$$

Como a transformação de coordenadas é da forma

$$\bar{\phi} \circ \phi^{-1}(x, y) = (h_1(x, y), h_2(y)),$$

onde h_2 é uma aplicação cuja matriz jacobiana

$$\left[\frac{\partial h_2^j}{\partial y^i}\right]_{i,j=1}^{d-k}$$

tem rank $d-k$, concluímos que as submersões ψ e $\bar{\psi}$ diferem por um difeomorfismo local: para cada $p \in U \cap \bar{U}$ existe um difeomorfismo local $\Psi : \mathbb{R}^{d-k} \to \mathbb{R}^{d-k}$, tal que

$$\bar{\psi} = \Psi \circ \psi,$$

numa vizinhança $U_p \subset U \cap \bar{U}$ de p.

Isto sugere uma nova definição alternativa de folheação:

Proposição 5.7. *Seja M uma variedade de dimensão d. Uma folheação $\mathcal{F}$ de dimensão k de M determina uma colecção maximal $\{\psi_i\}_{i\in I}$ de submersões $\psi_i : U_i \to \mathbb{R}^{d-k}$, onde $\{U_i\}_{i\in I}$ é uma cobertura aberta de M, que satisfaz a seguinte propriedade: Para todo o $i, j \in I$ e $p \in U_i \cap U_j$, existe um difeomorfismo local ψ_{ji}^p de $\mathbb{R}^{d-k}$, tal que:*

$$\psi_j = \psi_{ji}^p \circ \psi_i,$$

numa vizinhança U_p de p. Reciprocamente, toda a colecção deste tipo define uma folheação de M.

A demonstração desta proposição será deixada como exercício.

Dada uma colecção de submersões $\{\psi_i\}_{i\in I}$, como na proposição, consideremos, para cada par $i, j \in I$, a aplicação

$$\phi_{ij} : U_i \cap U_j \to \mathrm{Dif}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^{d-k}),\ p \longmapsto \phi_{ij}^p.$$

Esta aplicação satisfaz

$$(\phi_{ji})^{-1} = \phi_{ji} \text{ em } U_i \cap U_j, \tag{5.2}$$

e a condição de *cociclo*:

$$\phi_{ij} \circ \phi_{jk} \circ \phi_{ki} = 1 \text{ em } U_i \cap U_j \cap U_k. \tag{5.3}$$

A possibilidade de associar um cociclo a uma folheação é um facto muito importante, como veremos mais tarde aquando do estudo dos fibrados, na Parte IV destas notas.

Vejamos agora algumas construções que nos permitem obter novas folheações a partir de folheações conhecidas. Os detalhes são deixados como exercício.

Produto de folheações. Sejam $\mathcal{F}_1$ e $\mathcal{F}_2$ folheações de M_1 e M_2. Então temos uma *folheação produto* $\mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2$ de $M_1 \times M_2$: se $\mathcal{F}_1 = \{L_\alpha^{(1)}\}_{\alpha\in A}$ e $\mathcal{F}_2 = \{L_\beta^{(2)}\}_{\beta\in B}$, então $\mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2 = \{L_\alpha^{(1)} \times L_\beta^{(2)}\}_{(\alpha,\beta)\in A\times B}$. Para esta folheação produto temos $\operatorname{codim}(\mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2) = \operatorname{codim}\mathcal{F}_1 + \operatorname{codim}\mathcal{F}_2$.

Pull-back de uma folheação. Sejam M e N variedades diferenciáveis, $\Phi : M \to N$ uma aplicação diferenciável, e $\mathcal{F}$ uma folheação de N. Assuma-se que Φ é *transversal* a $\mathcal{F}$, i.e., que para todo o $p \in M$

$$\mathrm{d}_p\Phi(T_pM) + T_{\Phi(p)}L = T_{\Phi(p)}N,$$

onde L é a folha de $\mathcal{F}$ que contém p. Então obtemos uma nova folheação $\Phi^*(\mathcal{F})$ de M, em que as folhas são as componentes conexas de $\Phi^{-1}(L)$, com $L \in \mathcal{F}$. Para esta folheação temos $\operatorname{codim}\Phi^*(\mathcal{F}) = \operatorname{codim}\mathcal{F}$.

Suspensão de um difeomorfismo. Seja $\Phi : M \to M$ um difeomorfismo. Na variedade $\mathbb{R} \times M$ temos uma folheação $\mathcal{F}$ de dimensão 1, em que as folhas são os conjuntos $\mathbb{R} \times \{p\}$, com $p \in M$. Em $\mathbb{R} \times M$ temos uma acção de $\mathbb{Z}$ definida por

$$n \cdot (t, p) = (t + n, \Phi^n(p)).$$

Esta acção transforma folhas de $\mathcal{F}$ em folhas de $\mathcal{F}$, e o quociente $N = (\mathbb{R} \times M)/\mathbb{Z}$ é uma variedade. Assim, obtemos uma folheação $\tilde{\mathcal{F}}$ de N, cujas folhas são as classes $[L]$ em N, com $L \in \mathcal{F}$. A esta folheação chama-se *suspensão* do difeomorfismo Φ.

As folheações surgem naturalmente em muitas construções de geometria diferencial e veremos muitos outros exemplos de folheações nestas notas.

Exercícios.

1. Mostre que as folhas de uma folheação são subvariedades iniciais.

2. Demonstre a Proposição 5.7.

3. Sejam $\mathcal{F}_1$ e $\mathcal{F}_2$ folheações de M_1 e M_2, definidas por famílias de submersões $\{(U_i, \psi_i)\}_{i \in I}$ e $\{(V_j, \phi_j)\}_{j \in J}$. Mostre que $\{(U_i \times V_j, \psi_i \times \phi_j)\}_{(i,j) \in I \times J}$ define uma família de submersões associada à folheação produto $\mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2$ de $M_1 \times M_2$.

4. Seja $\Phi : M \to N$ uma aplicação diferenciável e $\mathcal{F}$ uma folheação de N. Se $\mathcal{F}$ é definida por uma família de submersões $\{(U_i, \psi_i)\}_{i \in I}$, mostre que Φ é transversal a $\mathcal{F}$ sse $\psi_i \circ \Phi$ é uma submersão, para cada $i \in I$. Conclua que $\Phi^*(\mathcal{F})$ é a folheação definida pela família de submersões $\{(\Phi^{-1}(U_i), \psi_i \circ \Phi)\}_{i \in I}$.

5. Seja $\mathcal{F}$ a folheação de Reeb de S^3, e $\Phi : S^3 \to N$ uma aplicação contínua constante em cada folha de $\mathcal{F}$. Mostre que Φ é constante.

6. Sejam $\mathcal{F}_1$ e $\mathcal{F}_2$ duas folheações de uma variedade M com a propriedade:

$$T_pM = T_pL^{(1)} + T_pL^{(2)}, \qquad \forall p \in M,$$

onde $L^{(1)}$ e $L^{(2)}$ são as folhas de $\mathcal{F}_1$ e $\mathcal{F}_2$ que passam por p. Mostre que existe uma folheação $\mathcal{F}$ de M cujas folhas são as componentes conexas de $L_i^{(1)} \cap L_j^{(2)}$, e que satisfaz $\operatorname{codim}\mathcal{F} = \operatorname{codim}\mathcal{F}_1 + \operatorname{codim}\mathcal{F}_2$.

7. Para uma folheação $\mathcal{F}$ de M, designa-se por $M/\mathcal{F}$ o espaço das folhas com a topologia quociente. Para cada um dos exemplos do texto, descreva explicitamente o espaço das folhas.
(Nota: O espaço da folhas é, frequentemente, bastante pobre. Uma boa parte da teoria da folheações é dedicada a encontrar melhor modelos para $M/\mathcal{F}$.)

Lição 6. Quocientes

Já vimos várias construções que produzem novas variedades a partir de variedades conhecidas, tais como o produto cartesiano de variedades, ou a imagem inversa de subvariedades por aplicações transversais. Uma outra forma de produzir novas variedades é formando quocientes de variedades.

Seja M um espaço topológico. Se $\sim$ é uma relação de equivalência em M, vamos designar por $M/\sim$ o conjunto das classes equivalência e por $\pi : M \to M/\sim$ a aplicação que a $p \in M$ associa a sua classe de equivalência: $\pi(p) = [p]$. Em $M/\sim$ consideramos a *topologia quociente*: um conjunto $V \subset M/\sim$ é aberto sse $\pi^{-1}(V)$ é aberto. Esta é a topologia mais fina em $M/\sim$ para a qual a aplicação quociente $\pi : M \to M/\sim$ é contínua. Um resultado básico sobre a topologia quociente, cuja verificação deixamos como exercício, é o seguinte:

Lema 6.1. *Seja M um espaço topológico Hausdorff e $\sim$ uma relação de equivalência em M, tal que $\pi : M \to M/\sim$ é uma aplicação aberta para a topologia quociente. Então $M/\sim$ é Hausdorff sse o gráfico de $\sim$, dado por*

$$R = \{(p, q) \in M \times M : p \sim q\},$$

é um subconjunto fechado de $M \times M$.

Seja, agora, M uma variedade e $\sim$ uma relação de equivalência em M. Gostaríamos, naturalmente, de saber quando é que existe um estrutura diferenciável em $M/\sim$, compatível com a topologia quociente. Antes de enunciar um resultado que fornece uma resposta completa a esta questão, precisamos de uma definição.

Recordemos que uma aplicação contínua $\Phi : X \to Y$, entre dois espaço topológicos, diz-se **própria** se $\Phi^{-1}(K) \subset X$ é compacto para todo o conjunto compacto $K \subset Y$. Se X e Y são Hausdorff, uma aplicação própria é, necessariamente, uma aplicação fechada.

Definição 6.2. *Uma **subvariedade própria** é uma subvariedade (N, Φ) de M em que $\Phi : N \to M$ é uma aplicação própria.*

Por um exercício da Lição 3, uma subvariedade própria é mergulhada. Por outro lado, se $\Phi : N \to M$ é própria, então a sua imagem $\Phi(N)$ é fechada. Reciprocamente, é fácil de ver que uma subvariedade mergulhada e fechada, é uma subvariedade própria.

Teorema 6.3. *Seja M uma variedade e $\sim$ uma relação de equivalência em M. As seguintes afirmações são equivalentes:*

(i) Existe uma estrutura diferenciável em $M/\sim$ tal que $\pi : M \to M/\sim$ é uma submersão.

(ii) O gráfico de $\sim$ é uma subvariedade própria de $M \times M$ e a projecção $p_1 : M \times M \to M$ restrita a R é uma submersão.

$$\begin{tikzcd} R \arrow[r, hook] & M \times M \arrow[dl, "p_1"'] \arrow[dr, "p_2"] & \\ M & & M \end{tikzcd}$$

Demonstração. Vejamos, separadamente, ambas as implicações.

(i) $\Rightarrow$ (ii). O gráfico da aplicação quociente

$$\mathcal{G}(\pi) = \{(p, \pi(p)) : p \in M\} \subset M \times M/\sim,$$

é uma subvariedade própria (ver Exercício 2). Como $Id \times \pi : M \times M \to M \times M/\sim$ é uma submersão, e

$$R = (Id \times \pi)^{-1}(\mathcal{G}(\pi)),$$

vemos que $R \subset M \times M$ é uma subvariedade mergulhada e fechada, i.e., é uma subvariedade própria.

Por outro lado, a aplicação $(Id \times \pi)|_R : R \to \mathcal{G}(\pi)$ é uma submersão e a aplicação $\mathcal{G}(\pi) \to X$, $(p, \pi(p)) \mapsto p$ é um difeomorfismo. Logo a sua composição $p_1|R$ é uma submersão.

(ii) $\Rightarrow$ (i). Dividimos a demonstração em vários lemas. O primeiro lema afirma que, localmente, podemos "endireitar" $\sim$:

Lema 6.4. *Para todo o $p \in M$, existe um sistema de coordenadas locais $(U, (x^1, \dots, x^d))$ centrado em p, tal que*

$$\forall q, q' \in U,\ q \sim q' \quad sse \quad x^{k+1}(q) = x^{k+1}(q'), \dots, x^d(q) = x^d(q'),$$

onde k é um inteiro independente de p e $d = \dim M$.

Para demonstrar este lema, seja $\Delta \subset M \times M$ a diagonal. Temos que $\Delta \subset R \subset M \times M$, com Δ e R ambas subvariedades mergulhadas de $M \times M$. Logo, Δ é uma subvariedade mergulhada de R.

Assim, para cada $p \in M$, existe uma vizinhança O de (p, p) em $M \times M$ e uma submersão $\Phi : O \to \mathbb{R}^{d-k}$, onde $d - k = \operatorname{codim} R$, tais que:

$$(q, q') \in O \cap R \ \text{ sse } \Phi(q, q') = 0.$$

Note-se que $k \geq 0$, pois $\Delta \subset R$ e $\operatorname{codim} \Delta = d$.

A aplicação $q \mapsto \Phi(q, p)$ tem diferencial com rank máximo em $q = p$. De facto, identificando $T_{(p,p)}(M \times M) = T_pM \times T_pM$, vemos que o diferencial $\mathrm{d}_{(p,p)}\Phi$ é zero no subespaço formado pelos elementos da forma $(\mathbf{v}, \mathbf{v}) \in T_pM \times T_pM$, e este subespaço é transversal ao subespaço formado por elementos da forma $(\mathbf{v}, 0) \in T_pM \times T_pM$. Assim, existe uma vizinhança V de p tal que $V \times V \subset O$, e a aplicação $q \mapsto \Phi(q, p)$ é uma submersão em V. Pela forma canónica para submersões, podemos assumir que existem coordenadas locais $(V, \phi) = (V, (u^1, \dots, u^k, v^1, \dots, v^{d-k}))$ centradas em p, tais que

$$\Phi \circ (\phi^{-1} \times \phi^{-1})(u^1, \dots, u^k, v^1, \dots, v^{d-k}, 0, \dots, 0) = (v^1, \dots, v^{d-k}).$$

Nestas coordenadas, os pontos $q \in V$ tais que $q \sim p$ são precisamente os pontos que satisfazem $v^1(q) = 0, \dots, v^{d-k}(q) = 0$.

Vamos escrever $\widehat{\Phi} = \Phi \circ (\phi^{-1} \times \phi^{-1})$. A aplicação

$$\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^{d-k} \to \mathbb{R}^{d-k},\ (u, v, w) \mapsto \widehat{\Phi}((u, v), (0, w)),$$

satisfaz

$$\widehat{\Phi}((u, v), (0, 0)) = v.$$

Assim, a matriz das derivadas parciais $\partial \widehat{\Phi}^i / \partial v^j$, $(i, j = 1, \dots, d - k)$, é invertível, e podemos aplicar o Teorema da Função Implícita, para concluir que existe uma função diferenciável $\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{d-k} \to \mathbb{R}^{d-k}$, $(u, w) \mapsto v(u, w)$, com a propriedade de que:

$$\widehat{\Phi}((u, v), (0, w)) = 0 \ \text{ sse } v = v(u, w).$$

Como $v(0, w) = w$ é solução desta equação, por unicidade, temos que

$$\phi(0, w) \sim \phi(0, w') \ \text{ sse } w = w'.$$

Isto mostra, ainda, que a aplicação $(u, w) \mapsto (u, v(u, w))$ é um difeomorfismo local. Existe, pois, um aberto U onde

$$(x^1, \ldots, x^d) = (u^1, \ldots, u^k, w^1, \ldots, w^{d-k})$$

são coordenadas locais. Nestas coordenadas, temos que

$$\forall q, q' \in U, \ q \sim q' \ \text{ sse } \ x^{k+1}(q) = x^{k+1}(q'), \ldots, x^d(q) = x^d(q'),$$

o que termina a demonstração do lema.

Como as funções coordenadas $x^{k+1}, \ldots, x^d$, dadas pelo lema, passam ao quociente $M/\sim$, vamos considerar os pares da forma $(\pi(U), (\bar{x}^{k+1}, \ldots, \bar{x}^d))$, onde $\bar{x}^i$ é a função induzida por x^i em $\pi(U)$.

Lema 6.5. *A família $\{(\pi(U), (\bar{x}^{k+1}, \ldots, \bar{x}^d))\}$ define em $M/\sim$ uma estrutura de espaço localmente euclidiano.*

Primeiro observamos que $\pi : M \to M/\sim$ é uma aplicação aberta. De facto, para qualquer $V \subset M$, temos que

$$\pi^{-1}(\pi(V)) = p_1|_R((p_2|_R)^{-1}(V)).$$

Mas, por hipótese, $p_1|_R$ é uma submersão, logo é uma aplicação aberta. Assim, se $V \subset M$ é aberto, então $\pi^{-1}(\pi(V))$ também é aberto, donde concluímos que $\pi(V) \subset M/\sim$ é aberto.

Temos, pois, que os $\pi(U)$ são abertos. Como a aplicação

$$(x^{k+1}, \ldots, x^d) : U \to \mathbb{R}^{d-k}$$

é contínua e aberta, segue-se também que a aplicação induzida

$$(\bar{x}^{k+1}, \ldots, \bar{x}^d) : \pi(U) \to \mathbb{R}^{d-k}$$

é contínua, aberta, e injectiva, i.e., é um homeomorfismo para a sua imagem.

Mostramos ainda que:

Lema 6.6. *A família $\{(\pi(U), (\bar{x}^{k+1}, \ldots, \bar{x}^d))\}$ determina uma estrutura diferenciável em $M/\sim$ tal que $\pi : M \to M/\sim$ é uma submersão.*

Consideremos dois sistemas de coordenadas na nossa família:

$$(\pi(U), \bar{\phi}) = (\pi(U), (\bar{x}^{k+1}, \ldots, \bar{x}^d)) \text{ e}$$
$$(\pi(V), \bar{\psi}) = (\pi(V), (\bar{y}^{k+1}, \ldots, \bar{y}^d)),$$

que correspondem a sistemas de coordenadas em M:

$$(U, \phi) = (U, (x^1, \ldots, x^d)) \text{ e}$$
$$(V, \psi) = (V, (y^1, \ldots, y^d)).$$

A respectiva função de transição

$$\bar{\psi}\circ\bar{\phi}^{-1}:\mathbb{R}^{d-k}\to\mathbb{R}^{d-k},$$

composta com a projecção $p:\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}^{d-k}$ nas últimas $d-k$ componentes, é dada por:

$$\bar{\psi}\circ\bar{\phi}^{-1}\circ p=p\circ\psi\circ\phi^{-1}.$$

Como o lado direito é uma aplicação diferenciável $\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}^{d-k}$, segue-se que a função de transição $\bar{\psi}\circ\bar{\phi}^{-1}$ é diferenciável.

Para verificar que $\pi:M\to M/\sim$ é uma submersão, basta observar que nos sistemas de coordenadas $(U,x^1,\dots,x^d)$ para M e $(\pi(U),(\bar{x}^{k+1},\dots,\bar{x}^d))$ para $M/\sim$, esta aplicação coincide com a projecção $p:\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}^{d-k}$.

Para terminar a demonstração, verificamos que

Lema 6.7. *A topologia em $M/\sim$ é Hausdorff e possui uma base contável.*

É claro que se M possui uma base contável, então a topologia quociente também possui uma base contável. Como o gráfico de $\sim$ é fechado em $M\times M$, M é Hausdorff e π é aberta, segue-se que $M/\sim$ é Hausdorff (cf. Lema 6.1).

□

Uma classe muito importante de relações de equivalência é dada pelas acções de grupos de difeomorfismos. Fixemos uma acção de um grupo G numa variedade M, i.e., um homomorfismo $\widehat{\Psi}:G\to\mathrm{Dif}(M)$, onde $\mathrm{Dif}(M)$ é o grupo dos difeomorfismos de M. Também podemos ver uma acção como uma aplicação $\Psi:G\times M\to M$, que escrevemos $(g,p)\mapsto g\cdot p$, de forma que

$$g\cdot p=\Psi(g)(p).$$

Como $\widehat{\Psi}$ é um homomorfismo de grupos, obtemos:

(a) $e\cdot p=p$, para todo o $p\in M$;

(b) $g\cdot(h\cdot p)=(gh)\cdot p$, para todo o $g,h\in G$ e $p\in M$.

Reciprocamente, toda a aplicação $\Psi:G\times M\to M$, com $p\mapsto g\cdot p$ diferenciável para $g\in G$, determina um homomorfismo $\widehat{\Psi}:G\to\mathrm{Dif}(M)$.

O quociente $G\backslash M$ é, por definição, o conjunto das classes de equivalência associadas à relação definida por:

$$p\sim q\iff\exists g\in G:\ q=g\cdot p.$$

Gostaríamos, pois, de saber que condições deve satisfazer uma acção para que o quociente $G\backslash M$ seja uma variedade.

Uma **acção livre** é uma acção $G\times M\to M$ em que todo o $g\in G-\{e\}$ actua sem pontos fixos, i.e.,

$$g\cdot p=p \text{ para algum } p\in M\quad\Longrightarrow\quad g=e.$$

Designando por G_p o **subgrupo de isotropia** do ponto $p\in M$, i.e.,

$$G_p=\{g\in G:g\cdot p=p\},$$

vemos que uma acção é livre sse $G_p=\{e\}$, para todo o $p\in M$.

Estamos, ainda, interessados na seguinte classe de acções:

Definição 6.8. *Dizemos que a acção $\Psi : G \times M \to M$ é* ***propriamente descontínua*** *se satisfaz as seguintes duas condições:*

(a) Para todo o $p \in M$, existe um vizinhança U de p, tal que:

$$g \cdot U \cap U = \emptyset, \quad \forall g \in G - G_p.$$

(b) Se $p, q \in M$ não pertencem à mesma órbita, então existem vizinhanças U de p e V de q, tais que

$$g \cdot U \cap V = \emptyset, \quad \forall g \in G.$$

Temos então:

Corolário 6.9. *Seja $\Psi : G \times M \to M$ uma acção livre e propriamente descontínua dum grupo G numa variedade M. Então existe uma estrutura diferenciável em $G\backslash M$ tal que $\pi : M \to G\backslash M$ é um difeomorfismo local.*

Demonstração. Vamos verificar a condição (ii) do Teorema 6.3.

Vejamos que $R \subset M \times M$ é uma subvariedade mergulhada. Como a acção é livre, a condição (a) da Definição 6.8 mostra que, dado um ponto $(p_0, g_0 \cdot p_0) \in R$, existe um aberto U contendo p_0, tal que:

$$g \cdot U \cap U = \emptyset, \quad \forall g \in G - \{e\}.$$

Vemos imediatamente que

$$(U \times g_0 \cdot U) \cap R = \{(q, g_0 \cdot q) : q \in U\}.$$

Assim, a aplicação

$$U \to (U \times g_0 \cdot U) \cap R, \quad q \mapsto (q, g_0 \cdot q),$$

é uma parametrização de uma vizinhança de $(p_0, g_0 \cdot p_0)$ em R (com a topologia relativa). Como este ponto era arbitrário, segue-se que R é uma variedade mergulhada. Note-se, ainda, que a projecção $p_1 : M \times M \to M$ restrita a R inverte estas parametrizações. Logo, p_1 restrito a R é um difeomorfismo local.

Deixamos como exercício verificar que a inclusão

$$R = \{(p, g \cdot p) : p \in M, g \in G\} \hookrightarrow M \times M$$

é própria. □

Nas condições do corolário, é fácil de ver que a projecção $\pi : M \to G\backslash M$ é, de facto, um revestimento. Assim, se M é 1-conexa, então M é um revestimento universal de $G\backslash M$, e temos que $\pi_1(G\backslash M) \simeq G$.

Exemplo 6.10.

Seja $M = \mathbb{S}^n$, com $n > 1$. Consideremos a acção $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ defina por:

$$\pm 1 \cdot (x_0, \dots, x_n) = \pm(x_0, \dots, x_n).$$

Esta acção é livre e propriamente descontínua. Concluímos que o quociente $\mathbb{P}^n = \mathbb{S}^n/\mathbb{Z}_2$ é uma variedade. Como $\mathbb{S}^n$, para $n > 1$, é 1-conexa, concluímos ainda que esta aplicação é um revestimento universal e que $\pi_1(\mathbb{P}^n) = \mathbb{Z}_2$.

As acções propriamente descontínuas surgem naturalmente no estudo de grupos finitos ou discretos (ver exercícios). No estudo de grupos contínuos há que considerar outras classes de acções. Na próxima série de lições, estudaremos acções de uma classe muito importante de grupos infinitos contínuos, os chamados *grupos de Lie*. Iremos estudar nessa altura outros exemplos de quocientes.

Exercícios.

1. Seja M um espaço topológico Hausdorff e $\sim$ uma relação de equivalência em M, tal que $\pi : M \to M/\sim$ é uma aplicação aberta para a topologia quociente. Mostre que a topologia quociente em $M/\sim$ é Hausdorff sse o gráfico de $\sim$ é fechado.

2. Seja M um espaço topológico Hausdorff e $\sim$ uma relação de equivalência em M, tal que $\pi : M \to M/\sim$ é uma aplicação aberta, para a topologia quociente. Mostre que $M/\sim$ é Hausdorff sse o gráfico de $\sim$ é um subconjunto fechado de $M \times M$.

3. Mostre que (N, Φ) é uma subvariedade própria sse Φ é um mergulho e $\Phi(N) \subset M$ é fechado.

4. Seja $\Phi : M \to N$ uma aplicação diferenciável. Mostre que o seu gráfico

$$\mathcal{G}(\Phi) = \{(p, \Phi(p)) : p \in M\} \subset M \times N,$$

é uma subvariedade própria de $M \times N$.

5. Na variedade $\mathbb{R}^2 - \{0\}$ considere a relação de equivalência $\sim$ em que as classes de equivalência são as componentes conexas das rectas horizontais $y =$ const. Mostre que no espaço quociente existe uma estrutura diferenciável não-Hausdorff.

6. Se $G \times M \to M$ é uma acção livre e propriamente descontínua verifique que a inclusão

$$R = \{(p, g \cdot p) : p \in M, g \in G\} \hookrightarrow M \times M$$

é própria.

7. Se $G \times M \to M$ é uma acção dum grupo finito G numa variedade compacta M, mostre que a inclusão

$$R = \{(p, g \cdot p) : p \in M, g \in G\} \hookrightarrow M \times M$$

é própria.

8. Mostre que uma acção livre de um grupo finito G numa variedade M é propriamente descontínua.

9. Seja $\mathcal{F}$ uma folheação de M e designe por $M/\mathcal{F}$ o espaço das folhas. Dizemos que $\mathcal{F}$ é uma **folheação simples** se para cada $p \in M$ existe um sistema de coordenadas distinguido (U, ϕ) com a propriedade de que toda a folha L intersecta U no máximo numa placa. Mostre que $\mathcal{F}$ é simples sse existe uma estrutura diferenciável em $M/\mathcal{F}$, em geral não-Hausdorff, para a qual a aplicação $\pi : M \to M/\mathcal{F}$ é uma submersão.