PARTE II. **Teoria de Lie**

Depois de, na primeira série de lições, termos introduzido alguns dos conceitos elementares sobre variedades, vamos agora iniciar o estudo da geometria diferencial local. Os conceitos e ideias principais a reter nesta segunda série de lições são:

- Na Lição 7: A noção fundamental de *campo vectorial* e os conceitos base a ela associada: *curva integral* e *fluxo* de um campo.
- Na Lição 8: *Parênteses de Lie* de campos vectoriais. *Derivada de Lie*, que nos permite diferenciar objectos ao longo de um campo vectorial.
- Na Lição 9: *Distribuições*, objectos que generalizam a noção de campo vectorial. *Distribuições involutivas*, que são descrições infinitesimais de folheações.
- Na Lição 10: *Grupos de Lie*, uma classe muito importante de variedades, e os seus análogos infinitesimais, as *álgebras de Lie*.
- Na Lição 11: Como *integrar* álgebras de Lie em grupos de Lie.
- Na Lição 12: Os *grupos de transformações* que são realizações concretas de grupos de Lie.

Definição 7.1. *Um **campo vectorial** numa variedade M é uma secção do fibrado tangente $\pi : TM \to M$, i.e., é uma aplicação $X : M \to TM$ tal que $\pi \circ X = I$. O campo vectorial X diz-se de classe C^∞ se a aplicação $X : M \to TM$ é de classe C^∞. Designamos por $\mathfrak{X}(M)$ o conjunto dos campos vectoriais C^∞ numa variedade M.*

Se X é um campo vectorial em M, designamos por X_p, em vez de $X(p)$, o valor do campo vectorial no ponto $p \in M$. Para cada $p \in M$, X_p é uma derivação e, portanto, dada uma função $f \in C^\infty(M)$ podemos definir uma nova função $X(f) : M \to \mathbb{R}$ por:

$$X(f)(p) \equiv X_p(f).$$

Recordando a noção de diferencial de uma função, observe que esta definição é equivalente a:

$$X(f) = \mathrm{d}f(X).$$

Deve ser claro da definição de vector tangente, que a aplicação $f \mapsto X(f)$ satisfaz:

(i) $X(f + \lambda g) = X(f) + \lambda X(g)$;
(ii) $X(fg) = X(f)g + fX(g)$;

Seja $(U, x^1, \ldots, x^d)$ um sistema de coordenadas da variedade M. Então temos campos vectoriais $\frac{\partial}{\partial x^i} \in \mathfrak{X}(U)$ definidos por:

$$\frac{\partial}{\partial x^i}(p) \equiv \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p, \qquad (i = 1, \ldots, d).$$

Se $X \in \mathfrak{X}(M)$ é um campo vectorial em M, a sua restrição ao aberto U, designada por $X|_U$, pode ser escrita na forma:

$$X|_U = \sum_{i=1}^{d} X^i \frac{\partial}{\partial x^i},$$

onde os $X^i : U \to \mathbb{R}$ são certas funções, a que chamamos **componentes do campo vectorial** X em relação às coordenadas $(x^1, \ldots, x^d)$.

Lema 7.2. *Seja X um campo vectorial numa variedade M. As seguintes afirmações são equivalentes:*

(i) O campo vectorial X é de classe C^∞;
(ii) Para todo o sistema de coordenadas $(U, x^1, \ldots, x^d)$, as componentes X^i de X em relação a estas coordenadas são funções de classe C^∞;
(iii) Para qualquer função $f \in C^\infty(M)$, a função $X(f)$ é de classe C^∞.

Demonstração. Vejamos as implicações (i) $\Rightarrow$ (ii) $\Rightarrow$ (iii) $\Rightarrow$ (i).

Para verificar que (i) $\Rightarrow$ (ii), observe que se X é de classe C^∞ e U é um aberto, então a restrição $X|_U$ é de classe C^∞. Assim, se $(U, x^1, \ldots, x^d)$ é um sistema de coordenadas, temos que $\mathrm{d}x^i(X|_U)$ é de classe C^∞. Mas:

$$\mathrm{d}x^i(X|_U) = \mathrm{d}x^i(\sum_{j=1}^{d} X^j \frac{\partial}{\partial x^j}) = X^i.$$

Para verificar que (ii) $\Rightarrow$ (iii), observe que $f \in C^\infty(M)$ se e só se $f|_U \in C^\infty(U)$, para todo o domínio de coordenadas U. Mas:

$$X(f)|_U = \sum_{i=1}^d X^i \frac{\partial f}{\partial x^i} \in C^\infty(U).$$

Para verificar que (iii) $\Rightarrow$ (i), basta verificar que $X|_U$ é C^∞, para todo o domínio de coordenadas U. Recordemos que, se $(U, x^1, \ldots, x^d)$ é um sistema de coordenadas de M, então

$$(\pi^{-1}(U), (x^1 \circ \pi, \ldots, x^d \circ \pi, \mathrm{d}x^1, \ldots, \mathrm{d}x^d))$$

é um sistema de coordenadas de TM. Como:

$$\begin{aligned} x^i \circ \pi \circ X|_U &= x^i \in C^\infty(U), \\ \mathrm{d}x^i \circ X|_U &= X(x^i) \in C^\infty(U), \end{aligned}$$

concluímos que $X|_U$ é C^∞. $\square$

Assim, um campo vectorial $X \in \mathfrak{X}(M)$ determina uma derivação linear em $C^\infty(M)$. Reciprocamente,

Lema 7.3. *Toda a derivação linear $D : C^\infty(M) \to C^\infty(M)$ determina um campo vectorial $X \in \mathfrak{X}(M)$, através da fórmula:*

$$X_p(f) = D(f)(p).$$

Demonstração. A única coisa a mostrar é que $X_p(f)$ depende apenas do germe $[f] \in \mathcal{G}_p$, i.e., que se $f, g \in \mathcal{C}^\infty(M)$ são funções que coincidem nalguma vizinhança de p, então $D(f)(p) = D(g)(p)$. Isto segue-se do facto de que uma derivação D é local, i.e., que se $f \in C^\infty(M)$ é uma função que se anula num aberto $U \subset M$, então $D(f)$ também se anula em U. Para ver isto, seja $p \in U$, e escolha-se uma função $g \in C^\infty(M)$ tal que $g(p) > 0$ e $\sup g \subset U$. Como $gf \equiv 0$, temos:

$$0 = D(gf) = D(g)f + gD(f).$$

Calculando ambos os lados em p, obtemos $D(f)(p) = 0$. Logo, $D(f)|_U = 0$, como pretendido. $\square$

Daqui em diante, utilizaremos a mesma letra para representar um campo vectorial e a derivação de $C^\infty(M)$ que lhe está associada.

Seja $\Phi : M \to N$ uma aplicação diferenciável. Em geral, dado um campo vectorial X em M, não é possível transportar X para um campo vectorial Y em N (com recurso a Φ), e vice-versa. De qualquer forma, a seguinte definição é muito útil.

Definição 7.4. *Seja $\Phi : M \to N$ uma aplicação diferenciável. Um campo vectorial $X \in \mathfrak{X}(M)$ diz-se* ***Φ-relacionado*** *com um campo $Y \in \mathfrak{X}(N)$ se, para todo o $p \in M$, temos*

$$Y_{\Phi(p)} = \mathrm{d}\Phi(X_p).$$

Em certos casos, como, por exemplo, quando Φ é um isomorfismo, podemos determinar Y a parir de X e de Φ. Neste caso, e só neste caso, escrevemos $Y = \Phi_* X$. Note que, como derivações, temos que

$$\Phi_* X(f) = X(f \circ \Phi), \quad \forall f \in C^\infty(N).$$

Vamos chamar **caminho** numa variedade M a uma aplicação contínua $\gamma :]a, b[\to M$. Um **caminho suave** é um caminho em que a aplicação γ é de classe C^∞. Também consideramos caminhos $\gamma : I \to M$ definidos em intervalos que podem não ser abertos. Neste caso, dizemos que γ é suave se possui uma extensão a uma caminho suave definido num intervalo aberto $J \supset I$. Se $\gamma : I \to M$ é um caminho suave, a sua **derivada** é:

$$\dot\gamma(t) \equiv \mathrm{d}\gamma \cdot \left.\frac{\partial}{\partial t}\right|_t \in T_{\gamma(t)}M,$$

e está definida para todo o $t \in I$. Observe que a derivada $t \mapsto \dot\gamma(t)$ é um caminho suave em TM.

Definição 7.5. *Seja $X \in \mathfrak{X}(M)$ um campo vectorial. Um caminho suave $\gamma : I \to M$ diz-se uma **curva integral** de X se*

$$\dot\gamma(t) = X_{\gamma(t)}, \quad \forall t \in I. \tag{7.1}$$

Em coordenada locais $(U, (x^1, \ldots, x^d))$, o caminho $\gamma(t)$ fica determinado pelas suas componentes $\gamma^i(t) = x^i(\gamma(t))$. Por exemplo, a sua derivada é dada por:

$$\dot\gamma = \mathrm{d}\gamma \cdot \frac{\partial}{\partial t} = \sum_{i=1}^d \frac{\mathrm{d}\gamma^i}{\mathrm{d}t} \frac{\partial}{\partial x^i}.$$

Por seu lado, as curvas integrais dum campo vectorial X, com componentes X^i em relação às coordenadas $(x^1, \ldots, x^d)$, são as soluções do sistema de e.d.o.'s:

$$\frac{d\gamma^i}{dt} = X^i(\gamma^1(t), \ldots, \gamma^d(t)), \quad (i = 1, \ldots, d). \tag{7.2}$$

Este sistema é a forma local das equações (7.1). Resultados standard sobre existência, unicidade e intervalo máximo de definição de soluções, de um sistema de e.d.o.'s, fornece a seguinte proposição.

Proposição 7.6. *Seja $X \in \mathfrak{X}(M)$ um campo vectorial. Para cada $p \in M$, existem números $a_p, b_p \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ e uma curva suave $\gamma_p :]a_p, b_p[\to M$, tais que:*

(i) $0 \in]a_p, b_p[$ *e* $\gamma_p(0) = p$*;*
(ii) γ_p *é uma curva integral de* X*;*
(iii) Se $\eta :]c, d[\to M$ *é uma curva integral de* X *que satisfaz (i) e (ii), então* $]c, d[\subset]a_p, b_p[$ *e* $\gamma_p|_{]c,d[} = \eta$*.*

A γ_p chamamos a **curva integral maximal** de X por p. A proposição mostra que, por cada ponto, passa uma única curva integral maximal. Assim, para cada $t \in \mathbb{R}$, vamos definir

$$D_t = \{p \in M : t \in]a_p, b_p[\},$$

e o **fluxo** do campo vectorial $X \in \mathfrak{X}(M)$ é a aplicação $\phi_X^t : D_t \to M$ dada por

$$\phi_X^t(p) \equiv \gamma_p(t).$$

A proposição seguinte fornece as propriedades básicas do fluxo, e a sua verificação é deixada como exercício:

Proposição 7.7. *Seja $X \in \mathfrak{X}(M)$ um campo vectorial com fluxo ϕ_X^t. Então:*

(i) Para cada $p \in M$, existe uma vizinhança U de p e $\varepsilon > 0$, tal que a aplicação $(-\varepsilon, \varepsilon) \times U \to M$ dada por:

$$(t, q) \mapsto \phi_X^t(q),$$

está bem definida e é de classe C^∞;

(ii) Para cada $t \in \mathbb{R}$, D_t é aberto e $\bigcup_{t>0} D_t = M$;

(iii) Para cada $t \in \mathbb{R}$, $\phi_X^t : D_t \to D_{-t}$ é um difeomorfismo e:

$$(\phi_X^t)^{-1} = \phi_X^{-t};$$

(iv) Para cada $s, t \in \mathbb{R}$, o domínio de $\phi_X^t \circ \phi_X^s$ está contido em D_{t+s} e:

$$\phi_X^{t+s} = \phi_X^t \circ \phi_X^s.$$

Um campo vectorial diz-se **completo** se $D_t = M$, para todo o $t \in \mathbb{R}$, i.e., se a curva integral maximal por qualquer $p \in M$ está definida para $t \in]-\infty, +\infty[$. Neste caso, o fluxo de X pode ser visto como uma aplicação:

$$\mathbb{R} \times M \to M, \quad (t, p) \mapsto \phi_X^t(p).$$

As propriedades acima, traduzem o facto de que esta aplicação é uma acção do grupo aditivo $(\mathbb{R}, +)$ em M. Dito de outra forma, a aplicação

$$\mathbb{R} \to \mathrm{Dif}(M), \quad t \mapsto \phi_X^t,$$

é um homomorfismo do grupo aditivo $(\mathbb{R}, +)$ no grupo $(\mathrm{Dif}(M), \circ)$ dos difeomorfismos de M. Dizemos, pois, que ϕ_X^t é um *grupo a 1-parâmetro de transformações* de M. No caso não completo, falamos ainda de um grupo *local* a 1-parâmetro de transformações de M.

Se $X \in \mathfrak{X}(M)$ é um campo vectorial e $f \in C^\infty(M)$, já sabemos que $X(f) \in C^\infty(M)$. As expressões em coordenadas locais, mostram que X é um operador diferencial de 1ª ordem. Iterando esta construção, podemos considerar "potências" X^k, que mais não são que operadores diferenciais de ordem k:

$$X^{k+1}(f) \equiv X(X^k(f)).$$

Proposição 7.8 (Fórmula de Taylor)**.** *Seja $X \in \mathfrak{X}(M)$ um campo vectorial e $f \in C^\infty(M)$. Para cada $p \in M$ e inteiro positivo k, é válida a expansão:*

$$f \circ \phi_X^t = f + tX(f) + \frac{t^2}{2!}X^2(f) + \cdots + \frac{t^k}{k!}X^k(f) + 0(t^{k+1}),$$

onde $t \mapsto 0(t^{k+1})$ é uma função C^∞ numa vizinhança da origem, cujos termos de ordem $\leq k$ são nulos.

Demonstração. Pela fórmula de Taylor usual aplicada à função $t \mapsto f(\phi_X^t(p))$, basta verificar que

$$\left.\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}t^k} f(\phi_X^t(p))\right|_{t=0} = X^k(f)(p).$$

Para isso, vamos mostrar, por indução, que:

$$\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}t^k} f(\phi_X^t(p)) = X^k(f)(\phi_X^t(p)).$$

Para verificar esta igualdade se $k = 1$, basta observar que:

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(\phi_X^t(p)) &= \mathrm{d}_p f \cdot X_{\phi_X^t(p)} \\
&= X_{\phi_X^t(p)}(f) \\
&= X(f)(\phi_X^t(p)).
\end{aligned}$$

Agora, supondo a fórmula válida para $k-1$, calculamos:

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}t^k} f(\phi_X^t(p)) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}^{k-1}}{\mathrm{d}t^{k-1}} f(\phi_X^t(p))\right) \\
&= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} X^{k-1}(f)(\phi_X^t(p)) \\
&= X(X^{k-1}(f))(\phi_X^t(p)) = X^k(f)(\phi_X^t(p)).
\end{aligned}$$

□

Uma outra notação em voga para o fluxo de um campo vectorial, justificada por estes comentários, e bastante sugestiva, é a notação exponencial:

$$\exp(tX) \equiv \phi_X^t.$$

Nesta notação, as propriedades acima escrevem-se:

$$\exp(tX)^{-1} = \exp(-tX), \quad \exp((t+s)X) = \exp(tX) \circ \exp(sX),$$

enquanto que a expansão de Taylor pode ser escrita na forma sugestiva:

$$f(\exp(tX)) = f + tX(f) + \frac{t^2}{2!}X^2(f) + \cdots + \frac{t^k}{k!}X^k(f) + 0(t^{k+1}).$$

Não utilizaremos esta notação nestas notas.

Se $X \in \mathfrak{X}(M)$ é um campo vectorial, um ponto $p \in M$ diz-se **ponto singular** ou **ponto de equilíbrio** de X, se $X_p = 0$. É claro que a curva integral por um ponto singular $p \in M$ é o caminho constante, i.e., $\phi_X^t(p) = p$, para todo o $t \in \mathbb{R}$.

Para pontos não-singulares, temos a seguinte forma canónica:

Teorema 7.9. *Seja $X \in \mathfrak{X}(M)$ um campo vectorial e $p \in M$ um ponto não-singular: $X_p \neq 0$. Existem coordenadas locais $(U, (x^1, \ldots, x^d))$, centradas em p, tais que:*

$$X|_U = \frac{\partial}{\partial x^1}.$$

Demonstração. Primeiro escolhemos coordenadas locais $(V, (y^1, \ldots, y^d)) = (V, \psi)$, centradas em p, tais que:

$$X|_p = \left.\frac{\partial}{\partial y^1}\right|_p .$$

A aplicação $\sigma : \mathbb{R}^d \to M$ dada por

$$\sigma(t_1, \ldots, t_d) = \phi_X^{t_1}(\psi^{-1}(0, t_2, \ldots, t_d)),$$

fica bem definida e é C^∞ numa vizinhança da origem. O seu diferencial na origem satisfaz:

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}_0\sigma \cdot \left.\frac{\partial}{\partial t_1}\right|_0 &= \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t_1}\phi_X^{t_1}(\psi^{-1}(0, 0, \ldots, 0))\right|_{t_1=0} = X_p = \left.\frac{\partial}{\partial y^1}\right|_p , \\
\mathrm{d}_0\sigma \cdot \left.\frac{\partial}{\partial t_i}\right|_0 &= \left.\frac{\partial}{\partial t_i}\psi^{-1}(0, t_2, \ldots, t_d))\right|_0 = \left.\frac{\partial}{\partial y^i}\right|_p .
\end{aligned}$$

Concluímos que σ é um difeomorfismo local numa vizinhança da origem. Assim, existe um aberto U contendo p, tal que $\phi = \sigma^{-1} : U \to \mathbb{R}^d$ é um sistema de coordenadas. Escrevendo $(U, \phi) = (U, (x^1, \ldots, x^d))$, obtemos:

$$\begin{aligned}
\left.\frac{\partial}{\partial x^1}\right|_{\sigma(t_1,\ldots,t_d)} &= \mathrm{d}\sigma \cdot \left.\frac{\partial}{\partial t_1}\right|_{(t_1,\ldots,t_d)} \\
&= \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\phi_X^{t}(\psi^{-1}(0, t_2, \ldots, t_d))\right|_{t=t_1} \\
&= X(\phi_X^{t_1}(\psi^{-1}(0, t_2, \ldots, t_d))) = X_{\sigma(t_1,\ldots,t_d)}.
\end{aligned}$$

□

EXERCÍCIOS.

1. Seja M uma variedade conexa. Mostre que, dados $p, q \in M$ distintos, existe um caminho $\gamma : [0, 1] \to M$ de classe C^∞, tal que
   (a) $\gamma(0) = p$ e $\gamma(1) = q$;
   (b) $\frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}t}(t) \neq 0$, para todo o $t \in [0, 1]$;
   (c) γ é simples (i.e., γ é injectiva).
Aproveite este facto para mostrar que uma variedade conexa de dimensão 1 é difeomorfa a $\mathbb{R}$ ou a $\mathbb{S}^1$.

2. Seja $X \in \mathfrak{X}(M)$ um campo vectorial.
   (a) Se $\lambda \in \mathbb{R}$, qual é a relação entre as curvas integrais de X e de λX?
   (b) Se $\Phi : M \to N$ é uma aplicação diferenciável, e $Y \in \mathfrak{X}(N)$ é Φ-relacionado com X, qual é a relação entre as curvas integrais de X e de Y?

3. Demonstre a propriedades do fluxo, dadas pela Proposição 7.7.

4. Determine o fluxo do campo vectorial $X = y\partial/\partial x - x\partial/\partial y$ em $\mathbb{R}^2$.

5. Um campo vectorial X em $\mathbb{R}$ é completo? E em $\mathbb{R}^2$?

6. Mostre que, se M é uma variedade compacta, então todo o campo vectorial $X \in \mathfrak{X}(M)$ é completo. Dê um exemplo de uma variedade com dois campos vectoriais X_1 e X_2 completos, tais que $X_1 + X_2$ não é completo.

7. Seja $X \in \mathfrak{X}(M)$ um campo vectorial que não se anula. Mostre que as curvas integrais de X formam uma folheação $\mathcal{F}$ de M, de dimensão 1. Reciprocamente, mostre que, localmente, as folheações de dimensão 1 são todas desta forma. Se $\Phi : N \to N$ é um difeomorfismo, e $\mathcal{F}$ é a folheação obtida por suspensão deste difeomorfismo, verifique que, *globalmente*, as folhas de $\mathcal{F}$ são as curvas integrais de um campo vectorial X.

8. Uma estrutura Riemanniana numa variedade M é uma escolha de um produto interno $\langle\ ,\ \rangle_p$ em cada espaço tangente T_pM, que varia suavemente (para todos os campos vectoriais $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, a função $p \mapsto \langle X(p), Y(p)\rangle_p$ é C^∞). Mostre que existe uma estrutura Riemanniana em qualquer variedade M.

Lição 8. Parênteses e Derivada de Lie

Definição 8.1. *Sejam $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ campos vectoriais. O **parênteses de Lie** de X e Y é o campo vectorial $[X, Y] \in \mathfrak{X}(M)$ definido por:*

$$[X, Y](f) = X(Y(f)) - Y(X(f)), \quad \forall f \in C^\infty(M).$$

Note que, pela fórmula, $[X, Y]$ é um operador diferencial de ordem ≤ 2. No entanto, um pequeno cálculo mostra que $[X, Y]$ é uma derivação linear de $C^\infty(M)$:

$$[X, Y](fg) = [X, Y](f)g + f[X, Y](g), \quad \forall f, g \in C^\infty(M).$$

Assim, os termos de 2ª ordem cancelam-se e obtemos, de facto, um campo vectorial $[X, Y] \in \mathfrak{X}(M)$.

O cálculo do parênteses de Lie em coordenadas locais é muito simples, se pensarmos nos campos vectoriais como operadores diferenciais de 1ª ordem. Ilustramos este cálculo com o seguinte exemplo.

Exemplo 8.2.
Seja $M = \mathbb{R}^3$ com coordenadas (x, y, z), e tomemos os campos vectoriais:

$$\begin{aligned} X &= z\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial z}, \\ Y &= x\frac{\partial}{\partial z} - z\frac{\partial}{\partial x}, \\ Z &= y\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial y}. \end{aligned}$$

Então, por exemplo,

$$\begin{aligned} [X, Y] &= \left(z\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial z}\right)\left(x\frac{\partial}{\partial z} - z\frac{\partial}{\partial x}\right) - \left(x\frac{\partial}{\partial z} - z\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(z\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial z}\right) \\ &= y\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial y} = Z. \end{aligned}$$

Deixamos como exercício o cálculo dos outros dois parênteses de Lie:

$$[Y, Z] = X, \quad [Z, X] = Y.$$

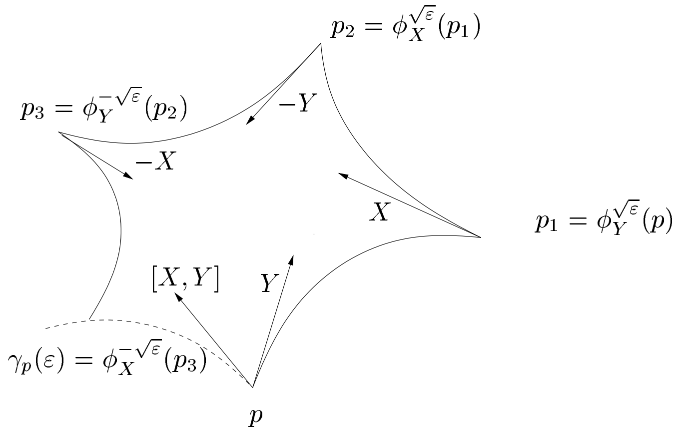
A proposição seguinte mostra que o parênteses de Lie mede a falta de comutatividade dos fluxos de X e Y.

Proposição 8.3. *Sejam $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ campos vectoriais. Para cada $p \in M$, o comutador*

$$\gamma_p(\varepsilon) \equiv \phi_X^{-\sqrt{\varepsilon}} \circ \phi_Y^{-\sqrt{\varepsilon}} \circ \phi_X^{\sqrt{\varepsilon}} \circ \phi_Y^{\sqrt{\varepsilon}}(p)$$

está bem definido para $\varepsilon \geq 0$, suficientemente pequeno. Verifica-se, ainda, a igualdade:

$$[X, Y]_p = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varepsilon}\gamma_p(\varepsilon)\right|_{\varepsilon=0^+}.$$



Demonstração. Fixemos coordenadas locais $(U, x^1, \ldots, x^d)$, centradas em p, de forma que:

$$X = \sum_{i=1}^{d} X^i \frac{\partial}{\partial x^i}, \quad Y = \sum_{i=1}^{d} Y^i \frac{\partial}{\partial x^i}.$$

O parênteses de Lie de Y e X é dado por:

$$[X, Y](x^i) = X(Y^i) - X(Y^i).$$

Vamos designar por p_1, p_2 e p_3 os pontos intermédios:

$$\begin{aligned} p_1 &= \phi_Y^{\sqrt{\varepsilon}}(p), \\ p_2 &= \phi_X^{\sqrt{\varepsilon}}(p_1), \\ p_3 &= \phi_Y^{-\sqrt{\varepsilon}}(p_2), \\ \gamma_p(\varepsilon) &= \phi_X^{-\sqrt{\varepsilon}}(p_3). \end{aligned}$$

A fórmula de Taylor (cf. Proposição 7.8), aplicada sucessivamente à função coordenada x^i, fornece:

$$\begin{aligned}
x^i(p_1) &= x^i(p) + \sqrt{\varepsilon} Y^i(p) + \frac{1}{2}\varepsilon Y^2(x^i)(p) + O(\varepsilon^{\frac{3}{2}}) \\
x^i(p_2) &= x^i(p) + \sqrt{\varepsilon}(Y^i(p) + X^i(p)) + \\
&\quad + \varepsilon\left(\frac{1}{2}Y^2(x^i)(p) + X(Y^i)(p) + \frac{1}{2}X^2(x^i)(p)\right) + O(\varepsilon^{\frac{3}{2}}) \\
x^i(p_3) &= x^i(p) + \sqrt{\varepsilon} X^i(p) + \\
&\quad + \varepsilon\left(X(Y^i)(p) - Y(X^i)(p) + \frac{1}{2}X^2(x^i)(p)\right) + O(\varepsilon^{\frac{3}{2}}) \\
x^i(\gamma_p(\varepsilon)) &= x^i(p) + \varepsilon\left(X(Y^i)(p) - Y(X^i)(p)\right) + O(\varepsilon^{\frac{3}{2}})
\end{aligned}$$

Logo:

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \frac{x^i(\gamma_p(\varepsilon)) - x^i(p)}{\varepsilon} = X(Y^i)(p) - Y(X^i)(p) = [X,Y]_p(x^i).$$

□

A nossa próxima proposição fornece as propriedades mais importantes do parênteses de Lie, e a sua demonstração é deixada como exercício.

Proposição 8.4. *O parênteses de Lie satisfaz as seguintes propriedades:*

(i) Anti-simetria: $[X,Y] = -[Y,X]$*;*
(ii) Bilinearidade: $[aX + bY, Z] = a[X,Z] + b[Y,Z]$, $\forall a,b \in \mathbb{R}$*;*
(iii) Identidade de Jacobi: $[X,[Y,Z]] + [Y,[Z,X]] + [Z,[X,Y]] = 0$*;*
(iv) Identidade de Leibniz: $[X, fY] = X(f)Y + f[X,Y]$, $\forall f \in C^\infty(M)$*.*

Uma outra propriedade importante é a de que o parênteses de Lie é preservado pelas aplicações diferenciáveis. O enunciado preciso é o seguinte, e a sua verificação é deixada como exercício.

Proposição 8.5. *Seja* $\Phi : M \to N$ *uma aplicação diferenciável. Se* X *e* $Y \in \mathfrak{X}(M)$ *são* Φ*-relacionados com, respectivamente,* Z *e* $W \in \mathfrak{X}(N)$*, então* $[X,Y]$ *é* Φ*-relacionado com* $[Z,W]$*.*

A interpretação geométrica fornecida pela Proposição 8.3, mostra que o parênteses de Lie está intimamente relacionado com o fluxo dos campos vectoriais. Existe, ainda, uma forma mais precisa desta relação. Para a compreender, necessitamos da seguinte definição:

Definição 8.6. *Seja* $X \in \mathfrak{X}(M)$ *um campo vectorial.*

(i) A ***derivada de Lie da função*** $f \in C^\infty(M)$ *ao longo de* X *é a função* $\mathcal{L}_X f$ *dada por:*

$$(\mathcal{L}_X f)_p = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t}\left(f(\phi_X^t(p) - f(p)\right).$$

(ii) A ***derivada de Lie do campo vectorial*** $Y \in \mathfrak{X}(M)$ *ao longo de* X *é o campo vectorial* $\mathcal{L}_X Y$ *dado por:*

$$(\mathcal{L}_X Y)_p = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t}\left(\mathrm{d}\phi_X^{-t} \cdot Y_{\phi_X^t(p)} - Y_p\right).$$

Para obter uma forma mais simétrica para estas definições, podemos observar que um difeomorfismos $\Phi : M \to M$ actua nas funções em $C^\infty(M)$ por:

$$(\Phi^* f)(p) = f(\Phi(p)),$$

e actua nos campos vectoriais $Y \in \mathfrak{X}(M)$ por:

$$(\Phi^* Y)_p = \mathrm{d}\Phi^{-1} \cdot Y_{\Phi(p)}.$$

Note que $\Phi^* Y = (\Phi^{-1})_* Y$ e, portanto, estas operações de "pull-back" estão relacionadas pela identidade:

$$\Phi^* Y(f) = Y((\Phi^{-1})^* f).$$

A derivada de Lie de um objecto P (uma função ou um campo vectorial) é, então, dada por:

$$\mathcal{L}_X P = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t} \left((\phi_X^t)^* P - P \right). \tag{8.1}$$

Mais tarde iremos extender esta definição a outros objectos.

Teorema 8.7. *Seja $X \in \mathfrak{X}(M)$ um campo vectorial.*

(i) Para toda a função $f \in C^\infty(M)$: $\mathcal{L}_X f = X(f)$.
(ii) Para todo o campo vectorial $Y \in \mathfrak{X}(M)$: $\mathcal{L}_X Y = [X, Y]$.

Demonstração. Para mostrar (i), basta observar que:

$$\mathcal{L}_X f = \left. \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f \circ \phi_X^t \right|_{t=0} = \mathrm{d}f \cdot X = X(f).$$

Para mostrar (ii), observamos primeiro que

$$\begin{aligned}
(\mathcal{L}_X Y)(f)(p) &= \lim_{t \to 0} \frac{1}{t} \left(\mathrm{d}\phi_X^{-t} \cdot Y_{\phi_X^t(p)} - Y_p \right)(f) \\
&= \lim_{t \to 0} \frac{1}{t} \left(Y_{\phi_X^t(p)}(f \circ \phi_X^{-t}) - Y_p(f) \right).
\end{aligned}$$

Por outro lado, a fórmula de Taylor fornece:

$$f \circ \phi_X^{-t} = f - tX(f) + O(t^2),$$

logo:

$$\begin{aligned}
(\mathcal{L}_X Y)(f)(p) &= \lim_{t \to 0} \frac{1}{t} \left(Y_{\phi_X^t(p)}(f) - tY_{\phi_X^t(p)}(X(f)) - Y_p(f) \right) \\
&= \lim_{t \to 0} \frac{1}{t} \left(Y_{\phi_X^t(p)}(f) - Y_p(f) \right) - Y_p(X(f)) \\
&= X_p(Y(f)) - Y_p(X(f)) = [X, Y](f)(p).
\end{aligned}$$

□

Exercícios.

1. Verifique as propriedades do parênteses de Lie, dadas pela Proposição 8.4.

2. Seja $\Phi : M \to N$ uma aplicação diferenciável. Mostre que se X e $Y \in \mathfrak{X}(M)$ são Φ-relacionados com, respectivamente, Z e $W \in \mathfrak{X}(N)$, então $[X, Y]$ é Φ-relacionado com $[Z, W]$.

3. Sejam $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ campos vectoriais, com fluxos ϕ_X^t e ϕ_Y^s. Mostre que $\phi_X^t \circ \phi_Y^s = \phi_Y^s \circ \phi_X^t$ para todo o s e t sse $[X, Y] = 0$.

4. Sejam $X_1, \ldots, X_k \in \mathfrak{X}(M)$ campos vectoriais numa variedade M, tais que:
(a)$\{X_1|_p, \ldots, X_k|_p\}$ são linearmente independentes, para todo o $p \in M$;
(b)$[X_i, X_j] = 0$ para quaisquer $i, j = 1, \ldots, k$.
Mostre que existe uma única folheação k-dimensional $\mathcal{F}$ de M tal que, para todo o $p \in M$, se tem

$$T_pL = \langle\, X_1|_p, \ldots, X_1|_p \rangle,$$

onde $L \in \mathcal{F}$ é a folha que contém p.

Lição 9. Distribuições e Teorema de Frobenius

Um campo vectorial $X \in \mathfrak{X}(M)$, que não se anule, determina um subespaço $\langle X_p \rangle \subset T_pM$, em cada $p \in M$. Estes subespaços variam suavemente com p. A definição seguinte generaliza esta situação.

Definição 9.1. *Seja M uma variedade de dimensão d e $1 \leq k \leq d$ um inteiro. Uma **distribuição** k-dimensional D em M, é uma aplicação*

$$M \ni p \mapsto D_p \subset T_pM,$$

que a cada $p \in M$ associa um subespaço $D_p \subset T_pM$ de dimensão k. Dizemos que a distribuição D é de classe C^∞ se, para cada $p \in M$, existe uma vizinhança U de p e campos vectoriais $X_1, \ldots, X_k \in \mathfrak{X}(U)$, tais que:

$$D_q = \langle X_1(q), \ldots, X_k(q) \rangle, \quad \forall q \in U.$$

Se D é uma distribuição em M e $X \in \mathfrak{X}(M)$ é um campo vectorial, dizemos que X é um campo vectorial em D ou que X é tangente a D, se

$$X_p \in D_p, \text{ para todo o } p \in M.$$

Vamos designar por $\mathfrak{X}(D)$ o conjunto dos campos vectoriais tangentes a uma distribuição D. Observe que $\mathfrak{X}(D)$ é um módulo sobre o anel $C^\infty(M)$.

Exemplos 9.2.

1. Se X é um campo vectorial que não se anula, então $D : p \mapsto \langle X_p \rangle$ é uma distribuição e X é um campo vectorial em D.

2. Em $M = \mathbb{R}^3$, temos a distribuição 2-dimensional $D = \langle X_1, X_2 \rangle$ gerada pelos campos vectoriais:

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial x} + z^2 \frac{\partial}{\partial y},$$
$$X_2 = \frac{\partial}{\partial y} + z^2 \frac{\partial}{\partial z}.$$

3. Note-se que nem toda a distribuição 2-dimensional é gerada por 2 campos vectoriais, como no exemplo anterior: em $M = \mathbb{R}^3 - \{0\}$, temos a distribuição 2-dimensional $D = \langle X, Y, Z \rangle$, gerada pelos campos vectoriais X, Y e Z do Exemplo 8.2. Deixamos como exercício mostrar que esta distribuição não é gerada por dois campos vectoriais.

No caso dos campos vectoriais, vimos que a noção de curva integral desempenha um papel crucial. Para as distribuições, a noção análoga é a seguinte:

Definição 9.3. *Seja D uma distribuição na variedade M. Uma subvariedade conexa (N, Φ) de M diz-se uma **variedade integral** de D se*

$$\mathrm{d}_p\Phi(T_pN) = D_{\Phi(p)}, \forall p \in N.$$

Observe que se D é uma distribuição k-dimensional, as suas variedades integrais (caso existam) têm dimensão k.

Exemplos 9.4.

1. *Consideremos a distribuição do Exemplo 9.2.2. O plano $z = 0$ é uma variedade integral desta distribuição, pois é conexo e*

$$D_{(x,y,0)} = \langle \left.\frac{\partial}{\partial x}\right|_{(x,y,0)}, \left.\frac{\partial}{\partial y}\right|_{(x,y,0)} \rangle.$$

2. *Voltemos à distribuição D do Exemplo 8.2. As esferas*

$$S_c = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 - 0 : x^2 + y^2 + z^2 = c\},$$

são variedades integrais de D. De facto, estas são conexas, e temos que:

$$T_{(x,y,z)}S_c = \{\vec{v} \in \mathbb{R}^3 : (x, y, z) \cdot \vec{v} = 0\},$$

logo:

$$T_{(x,y,z)}S_c \subset \langle X, Y, Z \rangle.$$

Por outro lado, a matriz cujas colunas são as componentes de X, Y e Z:

$$\begin{pmatrix} -y & x & 0 \\ -z & 0 & x \\ 0 & -z & y \end{pmatrix}$$

tem rank 2 em todos os pontos. Logo $T_pS_c = D_p$, para todo o $p \in S_c$. Portanto, S_c é uma variedade integral, para cada c.

No segundo exemplo, por cada $p \in M$ passa uma variedade integral (o que é que acontece no primeiro exemplo?). Note, ainda, que a colecção das variedades integrais formam uma folheação de $\mathbb{R}^3 - 0$. Mais geralmente, se $\mathcal{F}$ é uma folheação k-dimensional de uma variedade M, designemos por $T_p\mathcal{F} \equiv T_pL$ o espaço tangente à folha L que contém p. A aplicação $D : p \mapsto T_p\mathcal{F}$ é uma distribuição k-dimensional em M. Um campo vectorial pertence a D sse é tangente à folheação, i.e., sse toda a curva integral de X pertence a uma folha de $\mathcal{F}$.

Dada uma distribuição D, nem sempre é verdade que exista uma folheação $\mathcal{F}$ tal que $D = T\mathcal{F}$. Um condição necessária para que tal aconteça é dada pela seguinte proposição:

Proposição 9.5. *Seja D uma distribuição C^∞ em M, e suponha-se que por cada ponto de M passa uma variedade integral de D. Então, para todo o par de campos vectoriais $X, Y \in \mathfrak{X}(D)$, temos que $[X, Y] \in \mathfrak{X}(D)$.*

Demonstração. Sejam $X, Y \in \mathfrak{X}(D)$ campos vectoriais em D e $p_0 \in M$. Por hipótese, existe uma variedade integral (N, Φ) e $q_0 \in N$, tal que $\Phi(q_0) = p_0$. Como $\mathrm{d}_q\Phi : T_qN \to T_{\Phi(q)}M$ é injectiva, com imagem $D_{\Phi(q)}$, existem campos vectoriais $\tilde{X}, \tilde{Y} \in \mathfrak{X}(N)$ que são Φ-relacionados com X e Y, respectivamente. Mas, então, $[\tilde{X}, \tilde{Y}]$ é Φ-relacionado com $[X, Y]$ e, portanto,

$$[X, Y]_{p_0} = \mathrm{d}_{q_0}\Phi([\tilde{X}, \tilde{Y}]_{q_0}) \in \mathrm{d}_{q_0}\Phi(T_{q_0}N) = D_{p_0}.$$

Como p_0 era um ponto qualquer de M, concluímos que $[X, Y] \in \mathfrak{X}(D)$. $\square$

Estas observações motivam as seguintes definições:

Definição 9.6. *Seja D uma distribuição C^∞ em M.*

*(i) D diz-se **involutiva** se, sempre que $X, Y \in \mathfrak{X}(D)$, então $[X, Y] \in \mathfrak{X}(D)$.*
*(ii) D diz-se **integrável** se existe uma folheação $\mathcal{F}$ tal que $D = T\mathcal{F}$.*

O resultado fundamental sobre integrabilidade de distribuições diz que a única obstrução à integrabilidade de uma distribuição é, precisamente, a de não ser involutiva.

Teorema 9.7 (Frobenius)**.** *Uma distribuição D de classe C^∞ é integrável sse é involutiva. Neste caso, a folheação tangente a D é única.*

Demonstração. A Proposição 9.5 fornece uma das implicações. Para verificar a outra implicação, suponha-se que D é uma distribuição involutiva. Vamos mostrar que, para cada $p \in M$, existem campos vectoriais $X_1, \dots, X_k \in \mathfrak{X}(U)$, definidos numa vizinhança U de p, tais que:

(a) $D|_U = \langle X_1, \dots, X_k \rangle$;
(b) $[X_i, X_j] = 0$, para quaisquer $i, j = 1, \dots, k$.

Desta forma, pelo Exercício 4 da Lição 8, obtemos uma cobertura aberta $\{U_i\}_{i \in I}$ de M, tal que, para cada $i \in I$, existe uma única folheação $\mathcal{F}_i$ em U_i que satisfaz $T\mathcal{F}_i = D|_{U_i}$. Pela unicidade, sempre que $U_i \cap U_j \neq 0$, temos $\mathcal{F}_i|_{U_i \cap U_j} = \mathcal{F}_j|_{U_i \cap U_j}$. Assim, existe uma única folheação $\mathcal{F}$ de M tal que $\mathcal{F}|_{U_i} = \mathcal{F}_i$.

Fixemos, então, $p \in M$. Por hipótese, existem campos vectoriais $Y_1, \dots, Y_k$ definidos numa vizinhança V de p, tais que $D|_V = \langle Y_1, \dots, Y_k \rangle$. Podemos, também, assumir que V é um domínio de um sistema de coordenadas $(x^1, \dots, x^d)$ de M, de forma que

$$Y_i = \sum_{l=1}^{d} a_{il} \frac{\partial}{\partial x^l}, \quad (i = 1, \dots, k),$$

onde $a_{il} \in C^\infty(V)$. A matriz $A(q) = [a_{il}(q)]_{i,l=1}^{k,d}$, tem rank k em p. Podemos assumir, eventualmente após reordenar as variáveis x^l, que o menor $k \times k$, que corresponde às primeiras k linhas e colunas de A, tem determinante não-nulo numa vizinhança U de p. Seja B a matriz $k \times k$ que inverte este menor, e definam-se os campos vectoriais $X_1, \dots, X_k \in \mathfrak{X}(U)$ por:

$$\begin{aligned} X_i &= \sum_{j,l=1}^{k,d} b_{ij} a_{jl} \frac{\partial}{\partial x^l} \\ &= \frac{\partial}{\partial x^i} + \sum_{l=k+1}^{d} c_{il} \frac{\partial}{\partial x^l}, \quad (i = 1, \dots, k), \end{aligned}$$

onde $c_{il} \in C^\infty(U)$. Por um lado, vemos que

$$D|_U = \langle Y_1, \dots, Y_k \rangle = \langle X_1, \dots, X_k \rangle,$$

logo (a) é satisfeita. Por outro lado, um cálculo simples mostra que

$$[X_i, X_j] = \sum_{l=k+1}^{d} d_l^{ij} \frac{\partial}{\partial x^l}, \quad (i, j = 1, \dots, k),$$

para certas funções $d_l^{ij} \in C^\infty(U)$. Como D é involutiva, este comutador é uma combinação $C^\infty(M)$-linear dos $X_1, \dots, X_k$. Logo, as funções d_l^{ij} têm de ser identicamente nulas, e (b) também é satisfeita. □

Exercícios.

1. Dê um exemplo de uma distribuição D de dimensão 1 que não é globalmente gerada por um único campo vectorial.

2. Mostre que a distribuição 2-dimensional D do Exemplo 8.2, não é globalmente gerada por apenas dois campos vectoriais.

3. Mostre que o plano $z = 0$ é a única subvariedade integral da distribuição do Exemplo 9.2.2.

4. Verifique que a distribuição 2-dimensional em $\mathbb{R}^3$ definida pelos campos vectoriais

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial x}, \quad X_2 = e^{-x}\frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z},$$

não possui qualquer variedade integral.

5. Considere a distribuição D em $\mathbb{R}^3$ gerada pelos campos vectoriais:

$$\frac{\partial}{\partial x} + \cos x \cos y \frac{\partial}{\partial z}, \qquad \frac{\partial}{\partial y} - \sin x \sin y \frac{\partial}{\partial z}.$$

Verifique que D é involutiva e determine a folheação $\mathcal{F}$ que a integra.

6. Na 3-esfera $\mathbb{S}^3 \subset \mathbb{R}^4$ considere a distribuição 1-dimensional definida por

$$X = -y\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y} - w\frac{\partial}{\partial z} + z\frac{\partial}{\partial w}.$$

Determine a folheação $\mathcal{F}$ que a integra.

Lição 10. Grupos de Lie e Álgebras de Lie

A nossa próxima definição é uma axiomatização das propriedades do parênteses de Lie de campos vectoriais (cf. Proposição 8.4).

Definição 10.1. *Uma **álgebra de Lie** é uma espaço vectorial $\mathfrak{g}$ com uma operação $[\ ,\ ] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$, designada **parênteses de Lie**, que satisfaz:*

(i) Anti-simetria: $[X, Y] = -[Y, X]$;
(ii) Bilinearidade: $[aX + bY, Z] = a[X, Z] + b[Y, Z]$, $\forall a, b \in \mathbb{R}$;
(iii) Identidade de Jacobi: $[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0$.

É possível definir álgebras de Lie complexas (i.e, com $\mathfrak{g}$ um espaço vectorial complexo). Note, também, que o espaço vectorial na definição pode ter dimensão infinita, embora estejamos interessados, sobretudo, em álgebras de Lie de dimensão finita.

Exemplos 10.2.

1. *$\mathbb{R}^d$ com o parênteses de Lie zero $[\ ,\ ] \equiv 0$ é uma álgebra de Lie, dita a* ***álgebra de Lie abeliana*** *de dimensão d.*

2. *Para qualquer variedade, os campos vectoriais $\mathfrak{X}(M)$ formam uma álgebra de Lie (de dimensão infinita, se $\dim M \geq 0$).*

3. *Se V é um espaço vectorial, as aplicações lineares $T : V \to V$ formam uma álgebra de Lie, designada por $\mathfrak{gl}(V)$, com parênteses de Lie o comutador de transformações lineares:*

$$[T, S] = T \circ S - S \circ T.$$

Se $V = \mathbb{R}^n$, esta álgebra de Lie é designada por $\mathfrak{gl}(n)$. Fixando uma base para $\mathbb{R}^n$, podemos identificar $\mathfrak{gl}(n)$ com a álgebra de Lie das matrizes $n \times n$, com o comutador de matrizes.

4. *Em $\mathbb{R}^3$, podemos definir uma estrutura de álgebra de Lie, em que o parênteses de Lie é dado pelo produto externo:*

$$[\vec{v}, \vec{w}] = \vec{v} \times \vec{w}.$$

5. *Se $\mathfrak{g}$ e $\mathfrak{h}$ são álgebras de Lie, o seu produto cartesiano $\mathfrak{g} \times \mathfrak{h}$ é uma álgebra de Lie, com parênteses definido pela fórmula:*

$$[(X_1, X_2), (Y_1, Y_2)] = ([X_1, X_2]_{\mathfrak{g}}, [Y_1, Y_2]_{\mathfrak{h}}).$$

Acontece, como veremos mais adiante, que as álgebras de Lie de dimensão finita estão intimamente associadas à seguinte classe de grupos:

Definição 10.3. *Um* ***grupo de Lie*** *é um grupo G com uma estrutura diferenciável, tal que as operações*

$$\mu : G \times G \to G,\ (g, h) \mapsto gh \quad \textit{(multiplicação)},$$
$$\iota : G \to G,\ g \mapsto g^{-1} \quad \textit{(inversão)},$$

são aplicações diferenciáveis.

É possível (e útil) definir outras classes de grupos: grupos topológicos, grupos analíticos, grupos algébricos, etc. Não discutiremos outras classes nestas notas. Deixamos como exercício verificar que, na definição de grupo de Lie, basta assumir que a inversão é diferenciável.

Exemplos 10.4.

1. *$\mathbb{R}^d$ é um grupo de Lie para a adição de vectores.*

2. *Os reais não-nulos $\mathbb{R}^*$ e os complexos não-nulos $\mathbb{C}^*$ formam um grupo de Lie para a operação de multiplicação. É claro que $\mathbb{C}^*$ também é um grupo de Lie complexo, mas os grupos de Lie (i.e., variedades) que consideraremos serão sempre reais.*

3. *A circunferência $\mathbb{S}^1 = \{z \in \mathbb{C} : ||z|| = 1\} \subset \mathbb{C}^*$ é um grupo de Lie.*

*4. Se V é um espaço vectorial (de dimensão finita), o grupo das transformações lineares $T : V \to V$ invertíveis formam um grupo de Lie, designado por $GL(V)$, e chamado o **grupo geral linear**. Se $V = \mathbb{R}^n$, este grupo pode ser identificado com o grupo das matrizes $n \times n$ invertíveis, que se designa por $GL(n)$.*

5. Se G é um grupo de Lie, a componente conexa da identidade é um grupo de Lie. Por exemplo, os reais positivos $\mathbb{R}_+$, que formam a componente conexa da identidade de $\mathbb{R}^*$, são um grupo de Lie.

6. Se G e H são grupos de Lie, o produto cartesiano $G \times H$ é um grupo de Lie. Por exemplo, o toro $\mathbb{T}^n = \mathbb{S}^1 \times \cdots \times \mathbb{S}^1$ é um grupo de Lie.

Num grupo de Lie G, um campo vectorial X diz-se **invariante à esquerda** se:

$$(L_g)_* X = X, \quad \forall g \in G,$$

onde $L_g : G \to G$ é a **translação à esquerda** $h \mapsto gh$. De forma análoga, definem-se campos vectoriais invariantes à direita.

Proposição 10.5. *Seja G um grupo de Lie.*

(i) Todo o campo vectorial invariante à esquerda é de classe C^∞.
(ii) Se $X, Y \in \mathfrak{X}(G)$ são campos vectoriais invariantes à esquerda, então $[X, Y]$ também é invariante à esquerda.
(iii) O conjunto dos campos vectoriais invariantes à esquerda é um subespaço vectorial de $\mathfrak{X}(G)$, de dimensão igual a $\dim G$.

Demonstração. A demonstração de (i) é deixada como exercício. Para verificar (ii), basta observar que, se X e Y são campos vectoriais invariantes à esquerda, então:

$$(L_g)_*[X, Y] = [(L_g)_* X, (L_g)_* Y] = [X, Y], \quad \forall g \in G,$$

donde $[X, Y]$ é invariante à esquerda.

Seja $\mathfrak{X}_{\text{inv}}(G)$ o conjunto dos campos vectoriais invariantes à esquerda. Da definição, é claro que $\mathfrak{X}_{\text{inv}}(G) \subset \mathfrak{X}(G)$ é um subespaço linear. Por outro lado, a aplicação de restrição

$$\mathfrak{X}_{\text{inv}}(G) \to T_e G, \ X \mapsto X_e,$$

é um isomorfismo linear. De facto, se $\mathbf{v} \in T_e G$, então definimos um campo vectorial X em G por:

$$X_g = \mathrm{d}L_g \cdot \mathbf{v}.$$

Este campo vectorial é invariante à esquerda e $X_e = \mathbf{v}$. Logo, a aplicação de restrição $\mathfrak{X}_{\text{inv}}(G) \to T_e G$ é invertível. Assim,

$$\dim \mathfrak{X}_{\text{inv}}(G) = \dim T_e G = \dim G.$$

□

Segue-se da proposição que, se G é um grupo de Lie, os campos vectoriais em G invariantes à esquerda formam uma álgebra de Lie, que vamos designar por $\mathfrak{g}$. A demonstração mostra que podemos identificar $\mathfrak{g}$ com $T_e G$.

Exemplos 10.6.

1. Seja $G = (\mathbb{R}^d, +)$. Um campo vectorial em $\mathbb{R}^d$ é invariante à esquerda sse é constante: $X = \sum_{i=1}^d a_i \frac{\partial}{\partial x^i}$, com $a_i \in \mathbb{R}$. O parênteses de Lie de campos vectoriais constantes é zero, logo a álgebra de Lie de G é álgebra de Lie abeliana de dimensão d.

2. A álgebra de Lie do produto cartesiano $G \times H$ de dois grupos de Lie, é o produto cartesiano $\mathfrak{g} \times \mathfrak{h}$ das suas álgebras de Lie. Por exemplo, a álgebra de Lie de $\mathbb{S}^1$ tem dimensão 1, logo é abeliana. Assim, a álgebra de Lie do toro $\mathbb{T}^d$ também é a álgebra de Lie abeliana de dimensão d.

3. O espaço tangente na identidade do grupo geral linear $G = GL(n)$ pode ser identificado com $\mathfrak{gl}(n)$. Deixamos como exercício verificar que, o isomorfismo linear $\mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(n)$, leva o parênteses de Lie de campos invariantes à esquerda no comutador de matrizes. Assim, podemos identificar a álgebra de Lie do grupo $GL(n)$ com $\mathfrak{gl}(n)$.

Observação 10.7. Um questão natural é a de saber se a álgebra de Lie $\mathfrak{X}(M)$, formada pelos campos vectoriais numa variedade M, está também associada a algum grupo de Lie. Como esta álgebra tem dimensão infinita (se $\dim M > 0$), este grupo de Lie deverá ter dimensão infinita. O grupo em questão é, de facto, o grupo dos difeomorfismos $\mathrm{Dif}(M)$.

No entanto, o estudo dos grupos de Lie de difeomorfismos é um assunto extremamente difícil, do qual pouco sabemos. Este estudo está, pois, muito para além do âmbito destas notas. Faremos no futuro referências, de forma heurística, a $\mathrm{Dif}(M)$ como um grupo de Lie com álgebra de Lie $\mathfrak{X}(M)$. Quaisquer resultados obtidos por este tipo de argumentos serão sempre justificados à *posteriori*.

Já vimos que a cada grupo de Lie está associada uma álgebra de Lie. Vamos agora ver que a um morfismo de grupos de Lie está associado um homomorfismo de álgebras de Lie.

Definição 10.8.

(i) Uma aplicação $\phi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ entre duas álgebras de Lie diz-se um ***homomorfismo de álgebras de Lie****, se ϕ é uma aplicação linear e preserva os parênteses de Lie:*

$$\phi([X,Y]) = [\phi(X), \phi(Y)], \quad \forall X, Y \in \mathfrak{g}.$$

(ii) Uma aplicação $\Phi : G \to H$ entre dois grupos de Lie diz-se um ***homomorfismo de grupos de Lie****, se Φ é uma aplicação diferenciável e é um homomorfismo de grupos:*

$$\Phi(gh^{-1}) = \Phi(g)\Phi(h)^{-1}, \quad \forall g, h \in G.$$

Seja $\Phi : G \to H$ um homomorfismo de grupos de Lie. A Φ associamos uma aplicação linear $\Phi_* : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$: se $X \in \mathfrak{g}$, então $\Phi_*(X) \in \mathfrak{h}$ é o campo vectorial invariante à esquerda, que na identidade toma o valor $\mathrm{d}_e\Phi \cdot X_e$.

Proposição 10.9. *Seja $\Phi : G \to H$ um homomorfismo de grupos de Lie. Então:*

(i) Para todo o $X \in \mathfrak{g}$, $\Phi_* X$ é Φ-relacionado com X;
(ii) $\Phi_* : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ é um homomorfismo de álgebras de Lie.

Demonstração. A parte (ii) segue-se de (i), pois o parênteses de Lie é preservado para campos Φ-relacionados. Para mostrar (i), notamos que, como Φ é um homomorfismo, $\Phi \circ L_g = L_{\Phi(g)} \circ \Phi$. Logo:

$$\begin{aligned}
\Phi_*(X)_{\Phi(g)} &= \mathrm{d}_e L_{\Phi(g)} \cdot \mathrm{d}_e \Phi \cdot X_e \\
&= \mathrm{d}_e (L_{\Phi(g)} \circ \Phi) \cdot X_e \\
&= \mathrm{d}_e (\Phi \circ L_g) \cdot X_e \\
&= \mathrm{d}_g \Phi \cdot \mathrm{d}_e L_g \cdot X_e = \mathrm{d}_g \Phi \cdot X_g.
\end{aligned}$$

□

Exemplos 10.10.

1. Seja $T^2 = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$. Para cada $a \in \mathbb{R}$ temos o homomorfismo de grupos de Lie $\Phi_a : \mathbb{R} \to \mathbb{T}^2$ dado por:

$$\Phi_a(t) = (e^{it}, e^{iat}).$$

Se a é racional, a imagem de Φ_a é uma curva fechada, enquanto que se a é irracional, a imagem é uma curva densa no toro. A aplicação induzida entre as respectivas álgebra de Lie $\phi_a = (\Phi_a)_* : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ é dada por:

$$\phi_a(X) = (X, aX).$$

2. Fixemos uma matriz $A \in GL(n)$. Temos um automorfismo de grupos de Lie $\Phi_A : GL(n) \to GL(n)$ dado por conjugação:

$$\Phi_A(B) = ABA^{-1}.$$

Como esta aplicação é linear, a aplicação induzida $(\Phi_A)_* : \mathfrak{gl}(n) \to \mathfrak{gl}(n)$ também é dada por:

$$(\Phi_A)_*(X) = AXA^{-1}.$$

3. Mais geralmente, num grupo de Lie G qualquer, podemos considerar conjugação por um elemento $g \in G$: $i_g : G \to G$, $h \mapsto ghg^{-1}$. Esta aplicação é um automorfismo de Lie. A aplicação induzida, é um automorfismo da álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ de G, que se designa por $\mathrm{Ad}(g) : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$:

$$\mathrm{Ad}(g)(X) = (i_g)_* X.$$

Prosseguindo o estudo da correspondência entre grupos de Lie e álgebras de Lie, vamos agora ver que a cada subgrupo de Lie está associada uma subálgebra de Lie.

Definição 10.11. *Um subespaço $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ diz-se uma* ***subálgebra de Lie*** *se, para todo $X, Y \in \mathfrak{h}$, temos $[X, Y] \in \mathfrak{h}$.*

Exemplos 10.12.

1. Qualquer subespaço da álgebra de Lie abeliana $\mathbb{R}^d$ é uma subálgebra de Lie.

2. A álgebra de Lie $\mathfrak{gl}(n)$ possui, por exemplo, a subálgebra de Lie formada pelas matrizes de traço zero:

$$\mathfrak{sl}(n) = \{X \in \mathfrak{gl}(n) : \operatorname{tr} X = 0\},$$

bem como a subálgebra de Lie formada pelas matrizes anti-simétricas

$$\mathfrak{o}(n) = \{X \in \mathfrak{gl}(n) : X + X^T = 0\}.$$

3. As matrizes $n \times n$ complexas, designadas por $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{C})$, pode ser vista como uma álgebra de Lie real. Esta álgebra de Lie possui, por exemplo, a subálgebra de Lie das matrizes anti-hermiteanas

$$\mathfrak{u}(n) = \{X \in \mathfrak{gl}(n,\mathbb{C}) : X + \bar{X}^T = 0\},$$

e a subálgebra de Lie das matrizes anti-hermiteanas de traço zero:

$$\mathfrak{su}(n) = \{X \in \mathfrak{gl}(n,\mathbb{C}) : X + \bar{X}^T = 0, \operatorname{tr} X = 0\}.$$

4. Se $\phi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ é um homomorfismo de álgebras de Lie, então o seu núcleo é uma subálgebra de Lie de $\mathfrak{g}$ e a sua imagem é uma subálgebra de Lie de $\mathfrak{h}$.

A noção de subgrupo de Lie é um pouco mais subtil.

Definição 10.13. *Seja G um grupo de Lie. Uma subvariedade (H,Φ) de G diz-se um* ***subgrupo de Lie*** *se:*

(i) H é um grupo de Lie;
(ii) $\Phi : H \to G$ é um homomorfismo de grupos de Lie.

Como vimos na Lição 3, podemos sempre substituir a subvariedade (H,Φ) pelo subconjunto $\Phi(G) \subset G$, e a imersão Φ pela inclusão i. Como $\Phi(G)$ é um subgrupo de G, na definição de subgrupo de Lie, podemos assumir que $H \subset G$ é um subgrupo e que Φ é a inclusão. Por outro lado, como a aplicação induzida $\Phi_* : \mathfrak{h} \to \mathfrak{g}$ é injectiva, podemos assumir que a álgebra de Lie dum subgrupo de Lie $H \subset G$ é uma subálgebra de Lie $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$.

Exemplos 10.14.

1. Pelo Exemplo 10.10.1, para cada $a \in \mathbb{R}$ temos um subgrupo de Lie $\Phi_a(\mathbb{R})$ de $\mathbb{T}^2$. Se a é racional, esta subgrupo é mergulhado, enquanto que se a é irracional, este subgrupo é apenas imerso.

2. O grupo geral linear $GL(n)$ possui, por exemplo, os seguintes subgrupos de Lie mergulhados:

(i)O ***grupo especial linear*** *formado pelas matrizes de determinante 1:*

$$SL(n) = \{A \in GL(n) : \det A = 1\}.$$

A este subgrupo corresponde a subálgebra de Lie $\mathfrak{sl}(n)$.

(ii)O ***grupo ortogonal*** *formado pelas matrizes ortogonais:*

$$O(n) = \{A \in GL(n) : AA^T = I\}.$$

A este subgrupo corresponde a subálgebra de Lie $\mathfrak{o}(n)$.

(iii)O ***grupo ortogonal especial*** *formado pelas matrizes ortogonais com determinante positivo:*

$$SO(n) = \{A \in O(n) : \det A = 1\}.$$

A este subgrupo corresponde a mesma subálgebra de Lie $\mathfrak{so}(n) = \mathfrak{o}(n)$.

3. Da mesma forma, o grupo linear (real) $GL(n,\mathbb{C})$ possui, por exemplo, os seguintes subgrupos de Lie mergulhados:

(i)O ***grupo unitário*** *formado pelas matrizes unitárias:*

$$U(n) = \{A \in GL(n,\mathbb{C}) : A\bar{A}^T = I\}.$$

A este subgrupo corresponde a subálgebra de Lie $\mathfrak{u}(n)$.

*(ii)O **grupo unitário especial** formado pelas matrizes unitárias de determinante 1:*

$$SU(n) = \{A \in U(n) : \det A = 1\}.$$

A este subgrupo corresponde a subálgebra de Lie $\mathfrak{su}(n)$.

Exercícios.

1. Mostre que, na definição de grupo de Lie, basta assumir que:
(a)a inversão é diferenciável, ou que
(b)a aplicação

$$G \times G \to G : \ (g, h) \mapsto gh^{-1},$$

é diferenciável.

2. Para um grupo de Lie G verifique que todo o campo vectorial invariante à esquerda é de classe C^∞ e é completo.

3. Verifique que o espaço tangente na identidade do grupo geral linear $G = GL(n)$ pode ser identificado com $\mathfrak{gl}(n)$. Mostre, ainda, que o isomorfismo linear $\mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(n)$, leva o parênteses de Lie de campos invariantes à esquerda no comutador de matrizes.

4. Mostre que o fibrado tangente TG de um grupo de Lie G é trivial, i.e., existem campos vectoriais $X_1, \dots, X_d \in \mathfrak{X}(G)$ que em cada $g \in G$ formam uma base de T_gG. Conclua que uma esfera de dimensão par $\mathbb{S}^{2n}$ não admite uma estrutura de grupo de Lie.

5. Considere $\mathbb{S}^3 \subset \mathbb{H}$ como o conjunto dos quaterniões unitários. Verifique que $\mathbb{S}^3$, com o produto de quaterniões, é um grupo de Lie e determine a sua álgebra de Lie. Mostre, ainda, que $\mathbb{S}^3$ e $SU(2)$ são grupos de Lie isomorfos.

6. Seja G um grupo de Lie conexo com álgebra de Lie $\mathfrak{g}$. Mostre que G é abeliano sse $\mathfrak{g}$ é abeliana. Verifique ainda que se G é abeliano e compacto, então G é isomorfo ao d-toro $\mathbb{T}^d$.

7. Seja $A \subset G$ um subgrupo de um grupo de Lie G. Mostre que se existe um estrutura diferenciável tal que (A, i) é uma subvariedade de G, então essa estrutura diferenciável é única e, para essa estrutura, A é um grupo de Lie e (A, i) é um subgrupo de Lie.

8. Seja (H, Φ) um subgrupo de Lie de G. Mostre que Φ é um mergulho sse $\Phi(H)$ é fechado.

Lição 11. Integração de Álgebras de Lie e Exponencial

Vimos na Lição anterior que:

- A cada grupo de Lie está associada uma álgebra de Lie.
- A cada homomorfismo entre grupos de Lie está associado um homomorfismo entre as suas álgebras de Lie.
- A cada subgrupo de Lie está associado uma subálgebra de Lie.

É natural estudar se os recíprocos destes resultados são válidos, o que faremos nesta Lição. Note-se desde já que, por exemplo, os grupos de Lie $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{T}^n$ têm álgebras de Lie isomorfas, e que estes grupos são bastante diferentes do ponto de vista topológico. Isto mostra que existem questões topológicas que devem ser levadas em conta no estudo destes problemas de integração.

Começamos então com um resultado de natureza topológica, que mostra que um grupo de Lie conexo é determinado pelo que acontece numa vizinhança da identidade:

Proposição 11.1. *Seja G um grupo de Lie conexo e U uma vizinhança da identidade $e \in G$. Então,*

$$G = \bigcup_{n=1}^{\infty} U^n,$$

onde $U^n = \{g_1 \cdots g_n : g_i \in U, i = 1, \dots, n\}$.

Demonstração. Se $U^{-1} = \{g^{-1} : g \in U\}$ e $V = U \cap U^{-1}$, então V é uma vizinhança da origem, que satisfaz $V = V^{-1}$. Seja:

$$H = \bigcup_{n=1}^{\infty} V^n \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} U^n.$$

Para completar a demonstração, basta mostrar que $H = G$.

Observe-se, por um lado, que:

(i) H é um subgrupo: Se $g, h \in H$, então $g = g_1 \dots g_n$ e $h = h_1 \dots h_m$, com $g_i, h_j \in V$. Logo,

$$gh^{-1} = g_1 \dots g_n h_m^{-1} \dots h_1^{-1} \in V^{n+m} \subset H.$$

(ii) H é aberto: Se $g \in H$ então $gV \subset gH = H$ é um aberto que contém g.

Por outro lado, para cada $g \in G$, gH é um conjunto aberto, e como

$$H^c = \bigcup_{g \notin H} gH,$$

vemos que H também é fechado.

Sendo G conexo e $H \neq \emptyset$ aberto e fechado, concluímos que $H = G$. □

Podemos agora mostrar que:

Teorema 11.2. *Seja G um grupo de Lie com álgebra de Lie $\mathfrak{g}$. Dada uma subálgebra de Lie $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$, existe um único subgrupo de Lie conexo $H \subset G$, com álgebra de Lie $\mathfrak{h}$.*

Demonstração. A subálgebra de Lie $\mathfrak{h}$ define uma distribuição em G:

$$D : g \mapsto D_g \equiv \{X_g : X \in \mathfrak{h}\}.$$

Esta distribuição é C^∞ e involutiva. De facto, se $X_1, \dots, X_k$ é uma base para $\mathfrak{h}$, então estes campos geram D, logo D é C^∞. Por outro lado, se $Y, Z \in \mathfrak{X}(D)$, podemos escrever

$$Y = \sum_{i=1}^{k} a_i X_i, \quad Z = \sum_{j=1}^{k} b_j X_j.$$

Como:

$$[Y, Z] = \sum_{i,j=1}^{k} a_i a_j [X_i, X_j] + a_i X_i(b_j) X_j - b_j X_j(a_i) X_i \in \mathfrak{X}(D),$$

esta distribuição é involutiva.

Seja (H, Φ) a folha desta distribuição que contém a identidade $e \in G$. Se $g \in \Phi(H)$, então $(H, L_{g^{-1}} \circ \Phi)$ também é uma variedade integral de D que contém e. Logo, $L_{g^{-1}} \circ \Phi(H) \subset \Phi(H)$. Concluímos que, se $g, h \in \Phi(H)$, então $g^{-1}h \in \Phi(H)$, e portanto $\Phi(H)$ é um subgrupo de G. Como $\Phi : H \to \Phi(H)$ é uma bijecção, concluímos que H possui uma estrutura de grupo, tal que $\Phi : H \to G$ é um homomorfismo de grupos. Para verificar que (H, Φ) é um subgrupo de Lie, resta pois verificar que a aplicação $\hat{\nu} : H \times H \to H$, $(g, h) \mapsto g^{-1}h$, é C^∞. Para isso, observe que a aplicação $\nu : H \times H \to G$, $(g, h) \mapsto \Phi(g)^{-1}\Phi(h)$ é C^∞, pois é a composição de aplicações C^∞. Como temos um diagrama comutativo:

$$\begin{tikzcd} H \times H \arrow[r, "\nu"] \arrow[dr, "\hat{\nu}"'] & G \\ & H \arrow[u, "\Phi"'] \end{tikzcd}$$

e as folhas são subvariedades iniciais, concluímos que $\hat{\nu} : H \times H \to H$ é C^∞.

A demonstração da unicidade é deixada como exercício. □

Vejamos agora a questão de, dada uma álgebra de Lie $\mathfrak{g}$, encontrar um grupo de Lie G que integra $\mathfrak{g}$. Para isso, vamos utilizar o facto de que qualquer álgebra de Lie de dimensão finita é isomorfa a uma álgebra de matrizes. Este é um resultado fundamental cuja demonstração está para além do âmbito destas notas, pois exige um estudo mais detalhado da estrutura das álgebras de Lie. Limitamos-nos, pois, a enunciar este resultado na seguinte forma:

Teorema 11.3 (Ado)**.** *Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie de dimensão finita. Para algum inteiro n, existe um homomorfismo injectivo $\phi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(n)$.*

Observação 11.4. Dada uma álgebra de Lie $\mathfrak{g}$, um espaço vectorial V, e um homomorfismo $\rho : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V)$, chama-se a (V, ρ) um **representação da álgebra de Lie** ou, ainda, um **$\mathfrak{g}$-módulo**. Uma representação (V, ρ) diz-se **fiel**, se ρ é injectiva. Assim, nesta linguagem, o Teorema de Ado afirma que toda a álgebra de Lie de dimensão finita possui uma representação fiel.

Já sabemos que $\mathfrak{gl}(n)$ é a álgebra de Lie de $GL(n)$. Obtemos, como corolário do Teorema de Ado e da integrabilidade de subálgebras de Lie (cf. Teorema 11.2), o resultado seguinte:

Teorema 11.5. *Dada uma álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ de dimensão finita, existe um grupo de Lie G com álgebra de Lie isomorfa a $\mathfrak{g}$.*

Deve-se observar que, ao contrário do que o Teorema de Ado possa sugerir, existem grupos de Lie que *não* são isomorfos a grupos de matrizes. Veremos um exemplo mais adiante. Isto deve-se a que, como já sabemos, possam existir vários grupos de Lie que integram uma mesma álgebra de Lie.

Para esclarecer esta situação, recordemos que, se $\pi : N \to M$ é revestimento de uma variedade diferenciável M, então N possui uma estrutura diferenciável para a qual a aplicação de revestimento é um difeomorfismo local. Recordemos, ainda, que, se M é conexa, um **revestimento universal** de M é um revestimento 1-conexo (i.e., conexo e simplesmente conexo) de M. Este revestimento é único, a menos de isomorfismo. Para grupos de Lie é válida a

Proposição 11.6. *Seja G um grupo de Lie. O seu revestimento universal $\widetilde{G}$ é um grupo de Lie, e a aplicação de revestimento $\pi : \widetilde{G} \to G$ é um homomorfismo de grupos de Lie. As álgebras de Lie de G e $\widetilde{G}$ são isomorfas.*

Demonstração. Podemos identificar o revestimento universal $\widetilde{G}$ com as classes de homotopia de caminhos $\gamma : [0,1] \to G$, tais que $\gamma(0) = e$. A aplicação de revestimento é dada por $\pi([\gamma]) = \gamma(1)$. Definimos uma estrutura de grupo em $\tilde{G}$ da seguinte forma:

(a) Multiplicação $\mu : \widetilde{G} \times \widetilde{G} \to \widetilde{G}$: o produto $[\gamma][\eta]$ é a classe de homotopia do caminho $t \mapsto \gamma(t)\eta(t)$.
(b) Identidade $\tilde{e} \in \widetilde{G}$: é classe de homotopia do caminho constante $\gamma(t) = e$.
(c) Inversão $i : \widetilde{G} \to \widetilde{G}$: o inverso de $[\gamma]$ é a classe de homotopia do caminho $t \mapsto \gamma(t)^{-1}$.

Para verificar que $\widetilde{G}$ é um grupo de Lie, basta observar que a aplicação $\tilde{\nu} : \widetilde{G} \times \widetilde{G} \to \widetilde{G}$, $(g,h) \to g^{-1}h$, é diferenciável, pois temos um diagrama comutativo:

$$\begin{tikzcd} \widetilde{G} \times \widetilde{G} \arrow[r, "\tilde{\nu}"] \arrow[d, "\pi\times\pi"'] & \widetilde{G} \arrow[d, "\pi"] \\ G \times G \arrow[r, "\nu"'] & G \end{tikzcd}$$

em que as setas verticais são difeomorfismos locais, e ν é diferenciável.

Para esta estrutura de grupo, a aplicação de revestimento $\pi : \widetilde{G} \to G$ é, claramente, um homomorfismo de grupos. Como π é um difeomorfismo local, π induz um isomorfismo entre as álgebras de Lie de $\widetilde{G}$ e de G. $\square$

Da unicidade de revestimento universal, concluímos que:

Corolário 11.7. *Dada uma álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ de dimensão finita, existe um único (a menos de isomorfismo) grupo de Lie G, 1-conexo, com álgebra de Lie isomorfa a $\mathfrak{g}$.*

EXEMPLO 11.8.

O grupo especial unitário com $n = 2$, tem dimensão 3, e pode ser escrito na forma:

$$SU(2) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{C}, |a|^2 + |b|^2 = 1 \right\}.$$

Recordemos que um modelo para os quaterniões $\mathbb{H}$ é dado pelo subespaço das matrizes complexas 2×2, com base

$$1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad i = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \quad j = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad k = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix},$$

satisfazendo as relações:

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1, ijk = -1.$$

Definindo a norma de um quaternião $q = q_0 + q_1 i + q_2 j + q_3 k$, *por* $|q|^2 = q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2$, *vemos que o grupo* $SU(2)$ *pode ser identificado com o grupo dos quaterniões de norma 1. Assim,* $SU(2)$ *é um grupo de Lie isomorfo à esfera* $\mathbb{S}^3$ *e, por isso, é 1-conexo.*

Como vimos acima, a álgebra de Lie de $SU(2)$ *é formada pelas matrizes anti-hermiteanas, de traço zero:*

$$\mathfrak{su}(2) = \left\{ \begin{pmatrix} i\alpha & \beta \\ -\bar{\beta} & -i\alpha \end{pmatrix} : \alpha \in \mathbb{R}, \beta \in \mathbb{C} \right\}.$$

Este espaço tem dimensão 3. Identificamos a matriz definida por α *e* β *com o elemento* $(\alpha, \operatorname{Re}\beta, \operatorname{Im}\beta)$ *de* $\mathbb{R}^3$. *Consideremos a aplicação que a cada* $g \in SU(2)$ *associa a transformação linear* $\operatorname{Ad} g : \mathfrak{su}(2) \to \mathfrak{su}(2)$ *(cf. Exemplo 10.10.3). Deixamos como exercício verificar que, sob a identificação* $\mathfrak{su}(2) \simeq \mathbb{R}^3$, *temos:*

(a)A aplicação $\operatorname{Ad} g$ *determina um elemento de* $SO(3)$.

(b)$\operatorname{Ad} : SU(2) \to SO(3)$ *é um homomorfismo de grupos, sobrejectivo, com núcleo* $\{\pm I\}$.

Assim, a aplicação $\operatorname{Ad} : SU(2) \to SO(3)$ *é uma aplicação de revestimento. Como* $SU(2)$ *é 1-conexo, concluímos que* $SU(2) \simeq \mathbb{S}^3$ *é o revestimento universal de* $SO(3)$, *e que aplicação de revestimento identifica os pontos antipodais. Isto mostra que* $SO(3)$ *pode ser identificado com o plano projectivo* $\mathbb{P}^2$ *e, ainda, que* $\pi_1(SO(3)) = \mathbb{Z}_2$.

Vejamos agora a integração de homomorfismos entre grupos de Lie. Antes de mais, observamos que a aplicação identidade $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é um homomorfismo entre as álgebras de Lie de $\mathbb{S}^1$ e de $\mathbb{R}$. Por outro lado, não existe nenhum homomorfismo, não-trivial, de grupos de Lie $\Phi : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{R}$ (a sua imagem seria um subgrupo de $\mathbb{R}$, compacto, não-trivial). Assim, em geral, um homomorfismo entre as álgebras de Lie de dois grupos de Lie, não provém de um homomorfismo dos grupos de Lie. Mais uma vez as obstruções são de natureza topológica, e o seguinte resultado fornece uma resposta a este problema.

Teorema 11.9. *Sejam* G *e* H *grupos de Lie, com álgebras de Lie* $\mathfrak{g}$ *e* $\mathfrak{h}$. *Se* G *é 1-conexo, então para todo o homomorfismo* $\phi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$, *existe um único homomorfismo de grupos de Lie* $\Phi : G \to H$ *tal que* $\Phi_* = \phi$.

Demonstração. Seja $\mathfrak{k} = \{(X, \phi(X)) : X \in \mathfrak{g}\} \subset \mathfrak{g} \times \mathfrak{h}$ o gráfico de ϕ. Como ϕ é um homomorfismo de álgebras de Lie, $\mathfrak{k}$ é uma subálgebra de Lie de $\mathfrak{g} \times \mathfrak{h}$. Existe pois um subgrupo de Lie conexo $K \subset G \times H$ que a integra. Consideremos as projecções no primeiro e segundo factores:

$$\begin{tikzcd} & K \subset G \times H \arrow[dl, "\pi_1"'] \arrow[dr, "\pi_2"] & \\ G & & H \end{tikzcd}$$

A restrição da primeira projecção a K, $\pi_1|_K : K \to G$, fornece um homomorfismo de grupos de Lie, que satisfaz:

$$(\pi_1)_*(X, \phi(X)) = X.$$

Portanto, $(\pi_1|_K)_* : \mathfrak{k} \to \mathfrak{g}$ é um isomorfismo. Segue-se (exercício) que $\pi_1|_K : K \to G$ é um revestimento. Como G é 1-conexo, concluímos que $\pi_1|_K$ é um difeomorfismo de grupos de Lie. A composição

$$\Phi = \pi_2 \circ (\pi_1|_K)^{-1} : G \to H$$

é um homomorfismo de grupos de Lie, e temos que:

$$\begin{aligned}(\Phi)_*(X) &= (\pi_2)_* \circ (\pi_1|_K)_*^{-1}(X) \\ &= (\pi_2)_*(X, \phi(X)) = \phi(X).\end{aligned}$$

A unicidade é deixada como exercício. $\square$

Exemplo 11.10.
Consideremos o grupo especial linear

$$SL(2) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : ad - bc = 1 \right\}.$$

Já sabemos que a sua álgebra de Lie é $\mathfrak{sl}(2)$, o conjunto das matrizes 2×2 com traço nulo. Para determinar a estrutura topológica de $SL(2)$ é conveniente utilizar a mudança de variáveis $(a, b, c, d) \mapsto (p, q, r, s)$, definida por

$$a = p + q, \quad d = p - q, b = r + s, c = r - s,$$

de forma que:

$$ad - bc = 1 \quad \Longleftrightarrow p^2 + s^2 = q^2 + r^2 + 1.$$

Para cada $(q, r) \in \mathbb{R}^2$, o par (p, s) pertence à circunferência de raio $\sqrt{q^2 + r^2 + 1}$, donde concluímos que $SL(2)$ é difeomorfo a $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{S}^1$. Em particular,

$$\pi_1(SL(2)) = \pi_1(\mathbb{S}^1) = \mathbb{Z}.$$

Seja $\widetilde{SL(2)}$ o grupo revestimento universal de $SL(2)$. Vamos ver que $\widetilde{SL(2)}$ não é isomorfo a um grupo de matrizes. Para isso, precisamos do seguinte facto, cuja demonstração deixamos como exercício:

Lema 11.11. *Seja $\phi : \mathfrak{sl}(2) \to \mathfrak{gl}(n)$ um homomorfismo de álgebras de Lie. Existe um único homomorfismo de grupos de Lie $\Phi : SL(2) \to GL(n)$ tal que $\Phi_* = \phi$.*

Suponha-se, por absurdo, que existia um homomorfismo injectivo de grupos de Lie $\widetilde{\Phi} : \widetilde{SL(2)} \to GL(V)$. Este homomorfismo induz um homomorfismo de álgebras de Lie $\phi : \mathfrak{sl}(2) \to \mathfrak{gl}(n)$. Pelo lema, existe um único homomorfismo de grupos de Lie $\Phi : SL(2) \to GL(n)$ tal que $\Phi_* = \phi$, e obtemos um diagrama comutativo:

$$\begin{tikzcd} \widetilde{SL(2)} \arrow[r, "\widetilde{\Phi}"] \arrow[d, "\pi"'] & GL(V) \\ SL(2) \arrow[ur, "\Phi"'] & G \end{tikzcd}$$

Neste diagrama, a aplicação π não é injectiva, enquanto que $\widetilde{\Phi}$ é injectiva, uma contradição.

Como aplicação da integração de homomorfismos, vamos construir a aplicação exponencial para grupos/álgebras de Lie, que generaliza a exponencial de matrizes. Seja G um grupo de Lie com álgebra de Lie $\mathfrak{g}$. Dado um campo vectorial $X \in \mathfrak{g}$, a aplicação $\mathbb{R} \to \mathfrak{g}$, $t \mapsto tX$, é um homomorfismo de álgebras de Lie. Pelo teorema, existe um único homomorfismo de grupos de Lie $\Phi_X : \mathbb{R} \to G$ que o integra. Observe que:

$$\begin{aligned}
\Phi_X(0) &= e \\
\Phi_X(t+s) &= \Phi_X(t)\Phi_X(s) = L_{\Phi_X(t)}\Phi_X(s), \\
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Phi_X(t) &= \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\Phi_X(t+s)\right|_{s=0} \\
&= \mathrm{d}_e L_{\Phi_X(t)} \cdot \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\Phi_X(s)\right|_{s=0} \\
&= \mathrm{d}_e L_{\Phi_X(t)} \cdot X_e = X_{\Phi_X(t)}.
\end{aligned}$$

Isto é, $t \mapsto \Phi_X(t)$ é a curva integral de X que passa pela identidade $e \in G$. Recordando que ϕ_X^t designa o fluxo do campo vectorial X, temos:

Definição 11.12. *A **aplicação exponencial*** $\exp : \mathfrak{g} \to G$ *é a aplicação*

$$\exp(X) = \Phi_X(1) = \phi_X^1(e).$$

A proposição seguinte fornece as propriedades básicas da aplicação exponencial. A sua demonstração é deixada como exercício.

Proposição 11.13. *A aplicação exponencial* $\exp : \mathfrak{g} \to G$ *satisfaz:*

(i) $\exp((t+s)X) = \exp(sX)\exp(tX)$;
(ii) $\exp(-tX) = [\exp(tX)]^{-1}$;
(iii) $\exp$ *é* C^∞ *e* $\mathrm{d}_0 \exp = I$;
(iv) Se $\Phi : G \to H$ *é um homomorfismo de grupos de Lie, temos um diagrama comutativo:*

$$\begin{tikzcd}
G \arrow[r, "\Phi"] & H \\
\mathfrak{g} \arrow[u, "\exp"] \arrow[r, "\Phi_*"'] & \mathfrak{h} \arrow[u, "\exp"']
\end{tikzcd}$$

Observe que a propriedade (iii) mostra que a exponencial é um difeomorfismo de uma vizinhança de $0 \in \mathfrak{g}$ para uma vizinhança de $e \in G$. Em geral, a exponencial $\exp : \mathfrak{g} \to G$ não é sobrejectiva, não é injectiva, e não é um difeomorfismo local. Existem, no entanto, exemplos de grupos de Lie em que alguma(s) destas propriedades se verifica(m) (ver exercícios).

Exemplo 11.14.
Recordemos que se $G = GL(n)$ a sua álgebra de Lie pode ser identificada com $\mathfrak{gl}(n)$. Se $A \in \mathfrak{gl}(n)$, o campo vectorial invariante à esquerda que corresponde à matriz $A = (a_{ij})$, é o campo vectorial:

$$X_A = \sum_{ijk} a_{ik} x_{kj} \frac{\partial}{\partial x_{ij}}.$$

Assim, as curvas integrais deste campo, são as soluções do sistema linear:

$$\dot{x}_{ij} = \sum_k a_{ik} x_{kj},$$

que são dadas, como sabemos, por:

$$(x_{ij})(t) = e^{tA}(x_{ij})(0),$$

onde a exponencial da matriz A é:

$$e^A = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{A^n}{n!}.$$

Assim, concluímos que a aplicação exponencial $\exp : \mathfrak{gl}(n) \to GL(n)$*, coincide com a exponencial usual de matrizes.*

Da Proposição 11.13 (iv), concluímos que se $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{gl}(n)$ é uma subálgebra de Lie, a que corresponde o subgrupo de Lie conexo $H \subset GL(n)$, então a aplicação exponencial $\exp : \mathfrak{h} \to H$ *também é dada pela exponencial de matrizes. Por exemplo, se $\mathfrak{h} = \mathfrak{sl}(n)$ e $H = SL(n)$ a exponencial de uma matriz de traço zero é uma matriz de determinante 1, o que se segue, também, da fórmula bem conhecida:*

$$\det(e^A) = e^{\operatorname{tr} A}.$$

A exponencial é muito útil no estudo de grupos e álgebras de Lie, pois fornece uma relação directa entre a álgebra de Lie (o objecto infinitesimal) e o grupo de Lie (o objecto global). Temos, por exemplo, o seguinte resultado cuja demonstração deixamos como exercício:

Proposição 11.15. *Seja $H \subset G$ um subgrupo dum grupo de Lie e $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ um subespaço da álgebra de Lie de G. Seja, ainda, $U \subset \mathfrak{g}$ uma vizinhança de* 0 *difeomorfa a uma vizinhança da identidade em G, pela aplicação exponencial. Se*

$$\exp(\mathfrak{h} \cap U) = H \cap V,$$

então H, com a topologia relativa, é um subgrupo de Lie de G cuja álgebra de Lie é $\mathfrak{h}$.

Podemos utilizar esta proposição para demonstrar o seguinte resultado importante:

Teorema 11.16. *Seja G um grupo de Lie e $H \subset G$ um subgrupo fechado. Então H, com a topologia relativa, é um subgrupo de Lie.*

Exercícios.

1. Mostre que se $\Phi : G \to H$ é um homomorfismo de grupos de Lie, com G e H conexos, tal que $(\Phi)_* : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ é um isomorfismo, então Φ é um revestimento.

2. Complete a demonstração do Teorema 11.2 (i.e., a unicidade).

3. Seja G um grupo de Lie e $\pi : H \to G$ um seu revestimento. Mostre que H é um grupo de Lie.

4. Seja $SL(2, \mathbb{C})$ o grupo das matrizes complexas 2×2 de determinante 1. Mostre que $SL(2, \mathbb{C})$ é 1-conexo.
(Sugestão: Mostre que $SL(2, \mathbb{C})$ se retrai em $SU(2) = \mathbb{S}^3$.)

5. Mostre que todo o homomorfismo de álgebras de Lie $\phi : \mathfrak{sl}(2) \to \mathfrak{gl}(n)$ integra-se num único homomorfismo de grupos de Lie $\Phi : SL(2) \to GL(n)$. (Sugestão: Considere a complexificação $\phi^c : \mathfrak{sl}(2,\mathbb{C}) \to \mathfrak{gl}(n,\mathbb{C})$ de ϕ e utilize o exercício anterior.)

6. Verifique que a matriz

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

não pertence à imagem de $\exp : \mathfrak{gl}(2) \to GL(2)$.

7. Seja G um grupo de Lie compacto. Mostre que $\exp : \mathfrak{g} \to G$ é sobrejectiva. (Sugestão: Use o facto, a ser demonstrado mais adiante, que um grupo de Lie compacto possui uma métrica bi-invariante, i.e., invariante por translações à esquerda e à direita.)

8. Seja $\Phi : G \to H$ um homomorfismo de grupos de Lie, com G conexo. Mostre que se o núcleo de Φ é discreto então está contido no centro de G. Conclua que o grupo fundamental de um grupo de Lie é um grupo abeliano.

9. Sejam G e H grupos de Lie. Mostre que:
(a) Todo o homomorfismo $\Phi : \mathbb{R} \to G$ contínuo é C^∞;
(b) Todo o homomorfismo $\Phi : G \to H$ contínuo é C^∞;
(c) Se G e H são isomorfos como grupos topológicos, então G e H são isomorfos como grupos de Lie.

10. Demonstre a Proposição 11.15.

Lição 12. Grupos de Transformações

Seja G um grupo e M um conjunto. Recordemos que uma **acção** de G em M é um homomorfismo $\widehat{\Psi}$ de G para o grupo das bijecções de M. Também podemos ver uma acção como uma aplicação $\Psi : G \times M \to M$, que escrevemos $(g,p) \mapsto g \cdot p$, definindo:

$$g \cdot p \equiv \widehat{\Psi}(g)(p).$$

Como $\widehat{\Psi}$ é um homomorfismo de grupos, obtemos:
(a) $e \cdot p = p$, para todo o $p \in M$;
(b) $g \cdot (h \cdot p) = (gh) \cdot p$, para todo o $g, h \in G$ e $p \in M$.
Reciprocamente, toda a aplicação $\Psi : G \times M \to M$ que satisfaz (a) e (b), determina um homomorfismo $\widehat{\Psi}$. Daqui em diante, designamos uma acção por $\Psi : G \times M \to M$, e para cada $g \in G$, designamos por Ψ_g a bijecção:

$$\Psi_g : M \to M, \quad p \mapsto g \cdot p$$

Suponhamos, agora, que G é um grupo de Lie e M é uma variedade. Uma **acção diferenciável** é uma acção em que a aplicação $\Psi : G \times M \to M$ é diferenciável. Neste caso, cada $\Psi_g : M \to M$ é um difeomorfismo de M. Por isso, também dizemos que G é um **grupo de transformações** de M.

Seja $G \times M \to M$ uma acção diferenciável. O **subgrupo de isotropia** de um ponto $p \in M$, é o subgrupo de G dado por

$$G_p \equiv \{g \in G : g \cdot p = p\}.$$

Todo o subgrupo de isotropia $G_p \subset G$ é um subgrupo de Lie mergulhado, pois é fechado em G. Uma **acção livre** é uma acção em que todos os subgrupos de isotropia são triviais. Por outras palavras, para uma acção livre, todo o $g \in G - \{e\}$ actua sem pontos fixos:

$$g \cdot p = p, \text{ para algum } p \in M \quad \Longrightarrow \quad g = e.$$

Dada uma acção $\Psi : G \times M \to M$ definimos uma relação de equivalência $\sim$ em M por:

$$p \sim q \iff \exists g \in G : \ q = g \cdot p.$$

A classes de equivalência desta relação chamam-se **órbitas** da acção, e o conjunto das classes de equivalência designa-se por $G \backslash M$. Se dois pontos p e q pertence à mesma órbita, então os respectivos grupos de isotropia G_p e G_q são conjugados. Para cada $p \in M$, a aplicação

$$\Psi_p : G \to M, \quad g \mapsto g \cdot p,$$

induz uma bijecção de G/G_p com a órbita de p. Uma **acção transitiva** $\Psi : G \times M \to M$ é uma acção com uma só órbita. Isto é equivalente a dizer que, para quaisquer $p, q \in M$, existe $g \in G$ tal que $q = g \cdot p$. Neste caso, dizemos também que M é um **espaço homogéneo**.

EXEMPLO 12.1.
Consideremos a acção do grupo ortogonal especial $SO(3)$ em $\mathbb{R}^3$ dada por multiplicação de matrizes:

$$SO(3) \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad (A, \vec{v}) \mapsto A\vec{v}.$$

Geometricamente, a cada matriz $A \in SO(3)$, corresponde uma rotação de $\mathbb{R}^3$. As órbitas são as esferas $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ e a origem, de forma que o espaço quociente pode ser identificado com a semi-recta $\{r \in \mathbb{R} : r \geq 0\}$. Para um ponto $p = (0, 0, z)$, com $z > 0$, o subgrupo de isotropia G_p é formado pelas matrizes da forma

$$\left(\begin{array}{c|c} B & 0 \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right) \in SO(3),$$

e pode ser identificado com $SO(2)$. Como uma órbita com $r > 0$ passa pelo ponto $(0, 0, r)$, os subgrupos de isotropia de pontos fora da origem são todos isomorfos a $SO(2)$. A origem é um ponto fixo, logo $G_0 = SO(3)$.

Note que a acção deste exemplo é por transformações lineares de um espaço vectorial. Uma acção de um grupo de Lie G num espaço vectorial V por transformações lineares corresponde a uma **representação** de G, i.e., a um homomorfismo de grupo de Lie $\widehat{\Psi} : G \to GL(V)$.

EXEMPLO 12.2.
Para um grupo de Lie G qualquer, com álgebra de Lie $\mathfrak{g}$, temos a acção

$$G \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}, \quad (g, X) \mapsto \mathrm{Ad}(g)(X).$$

*A esta acção chamamos **acção adjunta** ou, ainda, **representação adjunta**. É claro que também podemos ver a acção adjunta como um homomorfismo de grupos de Lie $\mathrm{Ad} : G \to GL(\mathfrak{g})$.*

Por exemplo, se $G = S0(3)$, então a sua álgebra de Lie é $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(3)$, e a acção adjunta é por conjugação:

$$SO(3) \times \mathfrak{so}(3) \to \mathfrak{so}(3), \quad (A, X) \mapsto AXA^{-1}.$$

Deixamos como exercício calcular as órbitas desta acção e os respectivos subgrupos de isotropia.

Se $\Psi : G \times M \to M$ é uma acção diferenciável, no quociente $G\backslash M$ consideramos a topologia quociente. Esta é a topologia mais fina em $G\backslash M$ para a qual a projecção canónica $\pi : M \to G\backslash M$ é contínua. Gostaríamos de saber sob que condições na acção existe uma estrutura diferenciável em $G\backslash M$, compatível com esta topologia. A seguinte condição, como veremos, desempenha um papel fulcral.

Definição 12.3. *Uma acção diferenciável $\Psi : G \times M \to M$ diz-se uma* ***acção própria*** *se a aplicação:*

$$G \times M \to M \times M, \quad (g, p) \mapsto (p, g \cdot p),$$

é uma aplicação própria.

O resultado seguinte fornece uma condição *suficiente* para que exista uma estrutura diferenciável em $G\backslash M$, tal que $\pi : M \to G\backslash M$ seja uma submersão.

Teorema 12.4. *Seja $\Psi : G \times M \to M$ uma acção diferenciável de um grupo de Lie G numa variedade M. Se a acção é livre e própria então $G\backslash M$ possui uma estrutura de variedade diferenciável, compatível com a topologia quociente, tal que $\pi : M \to G\backslash M$ é uma submersão. Em particular,*

$$\dim G\backslash M = \dim M - \dim G.$$

Demonstração. Vamos aplicar o Teorema 6.3 à relação de equivalência $\sim$ definida pela acção. Assim, há que verificar que o gráfico

$$R = \{(p, g \cdot p) : p \in M, g \in G\} \subset M \times M,$$

é uma subvariedade própria e a projecção $p_1|_R : R \to M$ é uma submersão.

Consideremos a aplicação:

$$\Phi : G \times M \to M \times M, \quad (g, p) \mapsto (p, g \cdot p),$$

cuja imagem é precisamente R. Como a acção é livre, vemos imediatamente que esta aplicação é injectiva. O seu diferencial num ponto $(g, p) \in G \times M$ é a aplicação $\mathrm{d}_{(g,p)}\Phi : T_gG \times T_pM \to T_pM \times T_{g \cdot p}M$ dada por:

$$(\mathbf{v}, \mathbf{w}) \mapsto (\mathbf{w}, \mathrm{d}\Psi_p \cdot \mathbf{v} + \mathrm{d}\Psi_g \cdot \mathbf{w}).$$

Esta aplicação é injectiva. Concluímos que Φ é uma imersão injectiva com imagem R. Como, por hipótese, Φ é própria, segue-se que R é uma subvariedade própria de $M \times M$.

Para verificar que $p_1|_R : R \to M$ é uma submersão, basta verificar que a composição $p_1 \circ \Phi : G \times M \to M$ é uma submersão. Mas esta composição é a aplicação $(g, p) \mapsto p$, que é obviamente uma submersão. $\square$

Seja G um grupo de Lie, e consideremos a acção de G em si próprio por translações à esquerda:

$$G \times G \to G, \quad (g, h) \mapsto gh.$$

Esta acção é própria e livre. Se $H \subset G$ é um subgrupo fechado, então H é um subgrupo de Lie, e segue-se que a acção de H em G, por translações à esquerda, é própria e livre. O espaço quociente para esta acção são as classes laterais direitas:

$$H\backslash G = \{Hg : g \in G\}.$$

Pelo Teorema 12.4, concluímos que:

Corolário 12.5. *Seja G um grupo de Lie e $H \subset G$ um subgrupo fechado. Então $H\backslash G$ possui uma estrutura de variedade diferenciável, compatível com a topologia quociente, tal que $\pi : G \to H\backslash G$ é uma submersão.*

Observação 12.6. As acções que temos vindo a discutir, são **acções à esquerda**. Existe uma definição natural de **acção à direita**, e os resultados acima permanecem válidos, com modificações óbvias, para estas acções. Por exemplo, para um grupo de Lie G, a acção à direita de um subgrupo fechado $H \subset G$, é livre e própria. Assim, o conjunto das classes laterais esquerdas

$$G/H = \{gH : g \in G\},$$

também possui uma estrutura diferenciável.

Exemplos 12.7.

1. *Seja $G = SO(3)$ e $H = SO(2) = \mathbb{S}^1$ o subgrupo do Exemplo 12.2. Este subgrupo é fechado, logo o quociente é uma variedade diferenciável e a aplicação $\pi : SO(3) \to SO(3)/SO(2)$ é uma submersão. Note que $SO(3)/SO(2)$ pode ser identificado com a esfera $\mathbb{S}^2$, de forma que $\pi : SO(3) \to \mathbb{S}^2$ é uma submersão com fibras difeomorfas a $\mathbb{S}^1$.*
2. *Consideremos a acção adjunta de $G = SU(2)$. O subgrupo de isotropia H de um elemento $X \in \mathfrak{su}(2)$ não-nulo, é um subgrupo fechado e isomorfo a $\mathbb{S}^1$. Assim, obtemos uma submersão $\pi : SU(2) \to SU(2)/\mathbb{S}^1$. Veremos mais tarde que o quociente $SU(2)/\mathbb{S}^1$ pode ser identificado com a esfera $\mathbb{S}^2$. Recordando que $SU(2)$ é difeomorfo a $\mathbb{S}^3$, obtemos uma submersão $\pi : \mathbb{S}^3 \to \mathbb{S}^2$ com fibras difeomorfas a $\mathbb{S}^1$, a que se chama **fibração de Hopf**.*

Consideremos uma acção diferenciável qualquer $\Psi : G\times M \to M$. Fixando $p \in M$, podemos aplicar os resultados acima, com $H = G_p$, para concluir que G/G_p possui uma estrutura diferenciável, e que a aplicação

$$G/G_p \to M, \quad gG_p \mapsto g \cdot p,$$

é uma imersão injectiva. A imagem desta aplicação é a órbita por p, donde:

Corolário 12.8. *As órbitas de uma acção diferenciável $\Psi : G \times M \to M$ são subvariedades (imersas) de M.*

Se $G\times M \to M$ e $G\times N \to N$ são duas acções de G, dizemos que as acções são **equivalentes** se existir uma bijecção $\Phi : M \to N$ que é *equivariante*, i.e., que satisfaz:

$$\Phi(g \cdot p) = g \cdot \Phi(p), \quad \forall g \in G, p \in M.$$

Se $\Psi : G \times M \to M$ é uma acção transitiva, então é equivalente à acção por translações à esquerda $G \times G/G_p \to G/G_p$, $(g, hG_p) \mapsto (gh)G_p$, para qualquer $p \in M$. A equivalência é dada por:

$$\Phi : G/G_p \to M, \quad gG_p \mapsto g \cdot p.$$

No caso diferenciável, concluímos imediatamente:

Corolário 12.9. *Seja $\Psi : G \times M \to M$ uma acção diferenciável, transitiva, de um grupo de Lie G numa variedade M. Para todo o $p \in M$, a aplicação*

$$\Phi : G/G_p \to M, \quad gG_p \mapsto g \cdot p,$$

é um difeomorfismo equivariante de G/G_p com a órbita de p.

Resumindo: as variedades homogéneas são as variedades da forma G/H onde G é um grupo de Lie e $H \subset G$ é um subgrupo fechado. Numa variedade homogénea G/H temos uma acção natural de G, induzida da acção por translações à esquerda de G em si próprio. As variedades homogéneas incluem alguns do exemplos mais interessantes de variedades.

Exemplos 12.10.

1. Consideremos a acção $O(d+1) \times \mathbb{R}^{d+1} \to \mathbb{R}^{d+1}$ por multiplicação de matrizes:

$$(A, \vec{v}) \mapsto A\vec{v}.$$

As órbitas destas acção são as esferas $(x^0)^2 + \cdots + (x^d)^2 = r^2$ e a origem. Consideremos a esfera $\mathbb{S}^d$ de raio 1 e fixemos, por exemplo, o pólo norte $p = (0, \dots, 0, 1) \in \mathbb{S}^d$. O seu subgrupo de isotropia consiste em elementos da forma

$$\left(\begin{array}{c|c} B & 0 \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right) \in O(d+1),$$

ou seja, pode ser identificado com $O(d)$. Segue-se que a aplicação

$$O(d+1)/O(d) \to \mathbb{S}^d, \quad A \mapsto A\ O(d),$$

é um difeomorfismo. Da mesma forma, mostra-se que $\mathbb{S}^d$ também é difeomorfa ao espaço homogéneo $SO(d+1)/SO(d)$ (cf. Exemplo 12.2).

2. Seja $\mathbb{P}^d$ o espaço projectivo, e $\pi : \mathbb{R}^{d+1} - \{0\} \to \mathbb{P}^d$, a aplicação

$$\pi(x^0, \dots, x^d) = [x^0 : \cdots : x^d].$$

A acção $SO(d+1) \times \mathbb{R}^{d+1} \to \mathbb{R}^{d+1}$ por multiplicação de matrizes, induz uma acção diferenciável $SO(d+1) \times \mathbb{P}^d \to \mathbb{P}^d$, que é transitiva (porquê?). O subgrupo de isotropia de $[0 : \cdots : 0 : 1]$ consiste nos elementos da forma

$$\left(\begin{array}{c|c} B & 0 \\ \hline 0 & \det B \end{array}\right) \in SO(d+1),$$

ou seja, pode ser identificado com $O(d)$. Concluímos que $\mathbb{P}^d$ é difeomorfo ao espaço homogéneo $SO(d+1)/O(d)$.

Da mesma forma, podemos ver que o espaço projectivo complexo $\mathbb{CP}^d$ é difeomorfo ao espaço homogéneo $SU(d+1)/U(d)$.

3. Seja V um espaço vectorial de dimensão d, e designemos por $G_k(V)$ o conjuntos dos seus subespaços lineares de dimensão k. Fixando uma base $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_d\}$ para V, o grupo ortogonal actua em V por multiplicação de matrizes. Como uma transformação linear não-singular transforma subespaços de dimensão k em subespaços de dimensão k, vemos que temos uma acção

$$O(d) \times G_k(V) \to G_k(V).$$

É fácil de ver que, dados dois subespaços k-dimensionais $S_1, S_2 \subset V$, existe um $A \in O(d)$ que transforma S_1 em S_2. Por outras palavras, esta acção é transitiva.

Seja S_0 o subespaço gerado pelos primeiros k vectores da base. O subgrupo de isotropia deste elemento é:

$$H = \{\left(\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline 0 & B \end{array}\right) \in O(d) : A \in O(k), B \in O(d-k)\}.$$

Este subgrupo é fechado em G. Assim, temos uma bijecção

$$O(d)/O(k) \times O(d-k) \to G_k(V).$$

Requerendo que esta aplicação seja um difeomorfismo, obtemos uma estrutura de variedade homogénea em $G_k(V)$ de dimensão $k(d-k)$. Esta estrutura de variedade é independente da base escolhida, e é designada por ***variedade Grassmanniana*** *dos k-planos de V.*

Vejamos, agora, qual é a descrição infinitesimal de uma acção diferenciável $\Psi : G \times M \to M$. Recordemos que uma acção pode ser vista como um homomorfismo

$$\widehat{\Psi} : G \to \mathrm{Dif}(M).$$

Pensando em $\mathrm{Dif}(M)$ como um grupo de Lie com álgebra de Lie $\mathfrak{X}(M)$, então deverá existir um homomorfismo de álgebras de Lie

$$\psi = (\widehat{\Psi})_* : \mathfrak{g} \to \mathfrak{X}(M).$$

Vejamos que, de facto, assim é. Se $X \in \mathfrak{g}$ e $p \in M$, a curva

$$t \mapsto \exp(tX) \cdot p,$$

que passa por p em $t = 0$, está definida e é diferenciável num intervalo $]-\varepsilon, \varepsilon[$. Definimos o campo vectorial $\psi(X)$ em M, por:

$$\psi(X)_p \equiv \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \exp(tX) \cdot p\right|_{t=0}.$$

Deixamos a demonstração do seguinte lema como exercício:

Lema 12.11. *Para cada $X \in \mathfrak{g}$, $\psi(X)$ é um campo vectorial de classe C^∞ e a aplicação $\psi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{X}(M)$ é um anti-homomorfismo de álgebras de Lie.*

Observação 12.12. Um *anti-homomorfismo* de álgebras de Lie $\phi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ é uma aplicação linear que satisfaz:

$$\phi([X, Y]) = -[\phi(X), \phi(Y)], \quad \forall X, Y \in \mathfrak{g}.$$

O leitor poderá, pois, estranhar a presença do sinal neste lema. A razão é simples: com as nossas convenções (em que a álgebra de Lie de um grupo de Lie é formada pelos campos vectoriais invariantes à esquerda) a álgebra de Lie do grupo dos difeomorfismos $\mathrm{Dif}(M)$ é formada pelos campos vectoriais $\mathfrak{X}(M)$ com o *simétrico* do parênteses de Lie de campos vectoriais. O leitor deverá convencer-se disso mesmo (por exemplo, determine os subgrupos de Lie a 1-parametro no grupo de difeomorfismos). [2]

O lema sugere a seguinte definição:

Definição 12.13. *Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie. Uma* ***acção infinitesimal*** *de $\mathfrak{g}$ numa variedade M é um anti-homomorfismo de álgebras de Lie $\psi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{X}(M)$.*

Já vimos que toda a acção diferenciável $\Psi : G \times M \to M$ induz uma acção infinitesimal $\psi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{X}(M)$. O recíproco não é verdadeiro, como ilustra o exemplo seguinte.

Exemplo 12.14.

Consideremos a acção de $SO(3)$ em $\mathbb{R}^3$ por rotações, do Exemplo 12.2. A álgebra de Lie $\mathfrak{so}(3)$ possui a base

$$X = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad Y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad Z = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Para esta base, os parênteses de Lie satisfazem:

$$[X, Y] = -Z, \quad [Y, Z] = -X, \quad [Z, X] = -Y.$$

Vemos, por exemplo, que

$$\exp(tX) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos t & \operatorname{sen} t \\ 0 & -\operatorname{sen} t & \cos t \end{bmatrix}.$$

Logo,

$$\begin{aligned} \psi(X)_{(x,y,z)} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \exp(tX) \cdot (x, y, z)\Big|_{t=0}. \\ &= z\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial z}. \end{aligned}$$

De forma análoga, calculamos:

$$\psi(Y) = x\frac{\partial}{\partial z} - z\frac{\partial}{\partial x}, \quad \psi(Z) = y\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial y}.$$

Os campos $\{\psi(X), \psi(Y), \psi(Z)\}$ dizem-se os ***geradores infinitesimais*** *da acção. O facto de que ψ é um anti-homomorfismo de álgebras de Lie, explica os parênteses de Lie obtidos no Exemplo 8.2.*

Consideremos agora $M = \mathbb{R}^3 - \{p_0\}$, e a restrição de $\psi(X)$ a M, para todo o $X \in \mathfrak{g}$. Se escolhermos $p_0 \neq 0$, obtemos uma acção infinitesimal $\psi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{X}(M)$ que não é induzida por uma acção de G em M.

Pode-se, ainda, mostrar o seguinte resultado:

Teorema 12.15. *Seja $\psi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{X}(M)$ uma acção infinitesimal em que $\psi(X)$ é completo, para todo o $X \in \mathfrak{g}$. Então existe uma acção diferenciável $\Psi : G \to \mathrm{Dif}(M)$ que a integra, onde G é o grupo de Lie 1-conexo com álgebra de Lie $\mathfrak{g}$.*

Por exemplo, se M é uma variedade compacta, então toda a acção infinitesimal $\psi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{X}(M)$ integra-se numa acção global $\Psi : G \times M \to M$.

[2] Poderíamos ter definido o parênteses de Lie de campos vectoriais com o sinal oposto, mas isto levaria à presença de outros sinais negativos...

Exercícios.

1. Seja $\Psi : G\times M \to M$ uma acção diferenciável própria e livre, com projecção canónica $\pi : G \to G\backslash M$. Mostre que, para todo o $p \in G\backslash M$, existe uma vizinhança U de p e um difeomorfismo

$$\sigma : \pi^{-1}(U) \to G \times U, \quad q \mapsto (\chi(q), \pi(q)),$$

tal que:

$$\sigma(g \cdot q) = (g\chi(q), \pi(q)), \quad \forall q \in \pi^{-1}(U), g \in G.$$

2. Seja G um grupo de Lie e $H \subset G$ um subgrupo conexo e fechado. Mostre que:

(a) H é normal em G sse a sua álgebra de Lie $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ é um **ideal**, i.e.,

$$\forall X \in \mathfrak{g}, Y \in \mathfrak{h}, \quad [X, Y] \in \mathfrak{h}.$$

(b) Se H é normal em G, então G/H é um grupo de Lie e $\pi : G \to G/H$ é um homomorfismo de grupos de Lie.

3. Seja G um grupo de Lie e $H \subset G$ um subgrupo fechado. Mostre que se G/H e H são conexos então G é conexo. Deduza que os grupos $SO(d)$, $SU(d)$ e $U(d)$ são conexos. Mostre ainda que $O(d)$ e $GL(d)$ têm duas componentes conexas.

4. Seja $\Psi : G \times M \to M$ uma acção diferenciável transitiva. Mostre que:

(a) A componente conexa da identidade G^0 também actua transitivamente em M;

(b) Para todo o $p \in M$, G/G^0 é difeomorfo a $G_p/(G_p \cap G^0)$;

(c) Se G_p é conexo para algum $p \in M$, então G é conexo.

5. Para os seguintes grupos de Lie, determine as órbitas e os subgrupos de isotropia da acção adjunta:

(a) $SL(2)$.

(b) $SO(3)$.

(c) $SU(2)$.

(d) $SU(3)$.

6. Seja V um espaço vectorial de dimensão d. Designe por $S_k(V)$ o conjunto dos k-referenciais de V:

$$S_k(V) = \{(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k) : \text{ os } \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k \text{ são independentes}\}.$$

Mostre que $S_k(V)$ possui uma estrutura de variedade diferenciável homogénea de dimensão dk. A $S_k(V)$ chama-se **variedade de Stiefel** dos k-referenciais de V.
(Sugestão: Fixe uma base para V e considere a acção de $GL(d)$ em V por multiplicação de matrizes.)

7. Demonstre o Lema 12.11.
(Sugestão: Para um grupo de Lie G com álgebra de Lie $\mathfrak{g}$, para cada $X \in \mathfrak{g}$ designe por $\overline{X} \in \mathfrak{X}(G)$ o campo vectorial em G *invariante à direita* que vale X_e na identidade. Mostre que:

$$[\overline{X}, \overline{Y}] = -\overline{[X, Y]}, \quad \forall X, Y \in \mathfrak{g},$$

e exprima a acção infinitesimal $\phi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{X}(M)$ em termos de campos invariantes à direita.)

8. Seja $\Psi : G \times M \to M$ uma acção diferenciável, e $\psi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{X}(M)$ a acção infinitesimal associada. Se G_p é o subgrupo de isotropia de p, mostre que a sua álgebra de Lie é a *subálgebra de isotropia*:

$$\mathfrak{g}_p = \{X \in \mathfrak{g} : \psi(X)_p = 0\}.$$

9. Seja $\Psi : G \times M \to M$ uma acção diferenciável, e suponha que $p_0 \in M$ é um ponto fixo desta acção:

$$g \cdot p_0 = p_0, \forall g \in G.$$

Designe ainda por $\psi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{X}(M)$ a acção infinitesimal associada. Mostre que:

(a)A acção Ψ induz uma representação $\Xi : G \to GL(T_{p_0}M)$;

(b)A acção ψ induz uma representação $\xi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(T_{p_0}M)$;

(c)A representação Ξ de G integra a representação ξ de $\mathfrak{g}$.