Análise Matemática IV

Resolução dos problemas para as aulas práticas

Semana 2

1. Estabeleça as seguintes identidades (onde $z = x + iy$):

   a) $\cos(iz) = \cosh(z)$; b) $\operatorname{sen}(iz) = i\operatorname{senh} z$;

   c) $|\cos z|^2 + |\operatorname{sen} z|^2 = \cosh(2y)$; d) $\cos^2 z + \operatorname{sen}^2 z = 1$;

   e) $\operatorname{sen}(z + w) = \operatorname{sen} z \cdot \cos w + \cos z \cdot \operatorname{sen} w$; f) $\cosh^2 z + \operatorname{senh}^2 z = \cosh(2z)$.

Resolução:

(a) Utilizando a definição de coseno complexo

$$\cos(iz) = \frac{e^{i(iz)} + e^{-i(iz)}}{2} = \frac{e^{-z} + e^{z}}{2} = \cosh z$$

(b) De modo análogo

$$\operatorname{sen}(iz) = \frac{e^{i(iz)} - e^{-i(iz)}}{2i} = -i\frac{e^{-z} - e^{z}}{2} = i\operatorname{senh} z$$

(c) Notando que para um complexo z o quadrado do seu módulo é dado por $|z|^2 = z\overline{z}$, obtemos:

$$\begin{aligned}
|\cos z|^2 &= \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}\overline{\frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}} \\
&= \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}\frac{e^{-i\bar{z}} + e^{i\bar{z}}}{2} \\
&= \frac{e^{i(z-\bar{z})} + e^{i(z+\bar{z})} + e^{-i(z-\bar{z})} + e^{-i(z+\bar{z})}}{4}
\end{aligned}$$

e também:

$$\begin{aligned}
|\operatorname{sen} z|^2 &= \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}\overline{\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}} \\
&= \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}\frac{e^{-i\bar{z}} - e^{i\bar{z}}}{-2i} \\
&= \frac{e^{i(z-\bar{z})} - e^{i(z+\bar{z})} + e^{-i(z-\bar{z})} - e^{-i(z+\bar{z})}}{4}
\end{aligned}$$

Logo:

$$\begin{aligned}
|\cos z|^2 + |\operatorname{sen} z|^2 &= \frac{e^{i(z-\bar{z})} + e^{-i(z-\bar{z})}}{2} \\
&= \frac{e^{-2y} + e^{2y}}{2} \\
&= \cosh(2y).
\end{aligned}$$

(d) Mais uma vez utilizando a definição das funções trigonométricas complexas

$$\begin{aligned}\cos^2 z + \operatorname{sen}^2 z &= \Big(\frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}\Big)^2 + \Big(\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}\Big)^2 \\ &= \frac{1}{4}\Big(e^{2iz} + 2 + e^{-2iz} - e^{2iz} + 2 - e^{-2iz}\Big) = 1\end{aligned}$$

(e) Outra vez utilizando a definição das funções trigonométricas complexas

$$\operatorname{sen} z \cos w + \cos z \operatorname{sen} w =$$

$$\begin{aligned} &= \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}\frac{e^{iw} + e^{-iw}}{2} + \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}\frac{e^{iw} - e^{-iw}}{2i} = \\ &= \frac{e^{i(z+w)} + e^{i(z-w)} - e^{i(-z+w)} - e^{-i(z+w)}}{4i} + \frac{e^{i(z+w)} - e^{i(z-w)} + e^{i(-z+w)} - e^{-i(z+w)}}{4i} = \\ &= \frac{e^{i(z+w)} - e^{-i(z+w)}}{2i} = \operatorname{sen}(z + w)\end{aligned}$$

(f) Ainda mais uma vez utilizando a definição das funções trigonométricas complexas

$$\begin{aligned}\cosh^2 z + \operatorname{senh}^2 z &= \Big(\frac{e^{z} + e^{-z}}{2}\Big)^2 + \Big(\frac{e^{z} - e^{-z}}{2}\Big)^2 \\ &= \frac{1}{4}\Big(e^{2z} + 2 + e^{-2z} + e^{2z} - 2 + e^{-2z}\Big) \\ &= \frac{e^{2z} + e^{-2z}}{2} = \cosh(2z).\end{aligned}$$

2. Calcule o valor principal (i.e., tomando na função $\log z$ o ângulo correspondente à restrição principal) de:

$$\text{a) } \log(-i); \qquad \text{b) } \log(1-i); \qquad \text{c) } i^i; \qquad \text{d) } \Big(\tfrac{1+i}{\sqrt{2}}\Big)^{1+i}.$$

Resolução:

(a) $\log(-i) = \log(1e^{-\frac{i\pi}{2}}) = \log 1 - \dfrac{i\pi}{2} = -\dfrac{i\pi}{2}$

(b) $\log(1-i) = \log(\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}) = \dfrac{1}{2}\log 2 - i\dfrac{\pi}{4}$

(c) $i^i = e^{\log(i^i)} = e^{i\log i} = e^{i\log(1e^{i\frac{\pi}{2}})} = e^{i(i\frac{\pi}{2})} = e^{-\pi/2}$

(d) $\Big(\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}\Big)^{1+i} = e^{(1+i)\log(\frac{1+i}{\sqrt{2}})} = e^{(1+i)i\frac{\pi}{4}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}e^{-\pi/4}(1+i)$

3. Determine todas as soluções das seguintes equações:

$$\text{a) } e^z = 2 \qquad \text{b) } e^{iz} + e^{-iz} + 2 = 0 \qquad \text{c) } \log z = 1 + 2\pi i \qquad \text{d) } \operatorname{sen}(2z) = 5$$

Resolução:

(a) $e^z = 2 \;\Leftrightarrow\; z = \log 2 + 2k\pi i$ com $k \in \mathbb{Z}$.

(b) Multiplicando todos os termos por e^{iz}, obtem-se

$$e^{2iz} + 2e^{iz} + 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (e^{iz}+1)^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad e^{iz} = -1$$
$$\Leftrightarrow \quad z = \frac{1}{i}\log(-1) = -i(i\pi(2k+1)) = (2k+1)\pi$$

com $k \in \mathbb{Z}$.

(c) $\log z = 1 + 2\pi i \quad \Rightarrow \quad z = e^{1+2\pi i} = e$

Nota: $\log e = 1 + 2\pi i$, apenas com uma escolha adequada do ramo do logaritmo.

(d) Pela definição de seno

$$\operatorname{sen}(2z) = 5 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{e^{2iz} - e^{-2iz}}{2i} = 5$$

e multiplicando todos os termos da equação por e^{2iz}

$$e^{4iz} - 10ie^{2iz} - 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad e^{2iz} = \frac{10i \pm \sqrt{-96}}{2} = (5 \pm 2\sqrt{6})i$$

Então

$$2iz = \log((5 \pm 2\sqrt{6})i) + 2k\pi i \quad , \quad k \in \mathbb{Z}$$

Finalmente, dado que $5 \pm 2\sqrt{6}$ são ambos positivos,

$$z = \frac{-i}{2}\Big(\log(5 \pm 2\sqrt{6}) + i\frac{\pi}{2}\Big) + k\pi \quad , \quad k \in \mathbb{Z}$$

ou seja

$$z = \frac{\pi}{4} + k\pi - \frac{i}{2}\Big(\log(5 \pm 2\sqrt{6}) \quad , \quad k \in \mathbb{Z}$$

4. Determine o conjunto dos pontos do plano complexo onde as seguintes funções admitem derivada:

(a) $xy - ix$ (b) $z^2 - 3z$ (c) $z - \bar{z}$ (d) $\overline{e^{z}}$ (e) $\mathrm{Im}(z^2)$.

Resolução:

(a) Sendo $f(x+iy) = xy - ix$, verifica-se que

$$\mathrm{Re}f \equiv u(x,y) = xy \quad , \quad \mathrm{Im}f \equiv v(x,y) = -x$$

e como tal

$$\frac{\partial u}{\partial x} = y \quad , \quad \frac{\partial u}{\partial y} = x \quad , \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -1 \quad , \quad \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

Atendendo a que todas as derivadas parciais são contínuas, f será diferenciável no conjunto de pontos onde se verifiquem as condições de Cauchy-Riemann. Tem-se então que

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} y = 0 \\ x = 1 \end{cases}$$

pelo que f é diferenciável apenas no ponto $z = 1 + i0$, e

$$f'(1+0i) = \frac{\partial u}{\partial x}(1,0) + i\frac{\partial v}{\partial x}(0,1) = -i$$

(b) Sendo $f(z)=z^2-3z=(x+iy)^2-3(x+iy)=x^2-y^2-3x+i(2xy-3y)$, verifica-se que

$$\mathrm{Re} f \equiv u(x,y)=x^2-y^2-3x \quad , \quad \mathrm{Im} f \equiv v(x,y)=2xy-3y$$

e como tal

$$\frac{\partial u}{\partial x}=2x-3 \quad , \quad \frac{\partial u}{\partial y}=-2y \quad , \quad \frac{\partial v}{\partial x}=2y \quad , \quad \frac{\partial v}{\partial y}=2x-3$$

É óbvio que as condições de Cauchy-Riemann são verificadas para todo $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, e atendendo a que todas as derivadas parciais são contínuas, f é diferenciável em $\mathbb{C}$, e

$$f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}(x,y)+i\frac{\partial v}{\partial x}(x,y)=2x-3+i2y=2z-3$$

para todo $z\in\mathbb{C}$.

(c) Sendo $f(z)=z-\bar{z}=x+iy-(x-iy)=2iy$, verifica-se que

$$\mathrm{Re} f \equiv u(x,y)=0 \quad , \quad \mathrm{Im} f \equiv v(x,y)=2y$$

como tal, para todo $(x,y)\in\mathbb{R}^2$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=0 \quad , \quad \frac{\partial u}{\partial y}=0 \quad , \quad \frac{\partial v}{\partial x}=0 \quad , \quad \frac{\partial v}{\partial y}=2$$

Dado que, a condição $\dfrac{\partial v}{\partial y}=\dfrac{\partial u}{\partial x}$ não se verfica para nenhum $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, o domínio de diferenciabilidade de f é o conjunto vazio.

(d) Sendo $f(z)=\overline{e^z}=\overline{e^x\cos y+ie^x\mathrm{sen}\, y}=e^x\cos y-ie^x\mathrm{sen}\, y$, verifica-se que

$$\mathrm{Re} f \equiv u(x,y)=e^x\cos y \quad , \quad \mathrm{Im} f \equiv v(x,y)=-e^x\mathrm{sen}\, y$$

como tal

$$\frac{\partial u}{\partial x}=e^x\cos y \quad , \quad \frac{\partial u}{\partial y}=-e^x\mathrm{sen}\, y \quad , \quad \frac{\partial v}{\partial x}=-e^x\mathrm{sen}\, y \quad , \quad \frac{\partial v}{\partial y}=-e^x\cos y$$

Para que se verifiquem as condições de Cauchy- Riemann

$$\begin{cases}\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}\\ \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}\end{cases} \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases}e^x\cos y=-e^x\cos y\\ -e^x\mathrm{sen}\, y=e^x\mathrm{sen}\, y\end{cases} \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases}\cos y=0\\ \mathrm{sen}\, y=0\end{cases}$$

Atendendo a que as funções seno e coseno nunca se anulam simultâneamente, tem-se que o domínio de diferenciabilidade é o conjunto vazio.

(e) Sendo $f(z)=\mathrm{Im} z^2=\mathrm{Im}(x^2-y^2+i2xy)=2xy$, verifica-se que

$$\mathrm{Re} f \equiv u(x,y)=2xy \quad , \quad \mathrm{Im} f \equiv v(x,y)=0$$

como tal, para todo $(x,y)\in\mathbb{R}^2$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=2y \quad , \quad \frac{\partial u}{\partial y}=2x \quad , \quad \frac{\partial v}{\partial x}=0 \quad , \quad \frac{\partial v}{\partial y}=0$$

É imediato verificar que as derivadas parciais de u e v são contínuas em $\mathbb{R}^2$, e que as equações de Cauchy Riemann se verificam apenas no ponto $(0,0)$, pelo que a função admite derivada apenas em $z=0$, e

$$f'(0)=\frac{\partial u}{\partial x}(0,0)+i\frac{\partial v}{\partial x}(0,0)=0$$

5. Considere a função $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ definida por $f(z)=f(x+iy)=x^2-y^2+2i|xy|$.

(a) Estude a analiticidade de $f(z)$.

(b) Calcule $f'(z)$ nos pontos onde f é analítica.

Resolução:

(a) Começemos por estudar o conjunto dos pontos onde f é $\mathbb{C}$-diferenciável. Podemos escrever

$$f(z)=f(x+iy)=\begin{cases} x^2-y^2+2xyi & \text{se } xy\geq 0\\ x^2-y^2-2xyi & \text{se } xy<0\end{cases}$$

pelo que, se $xy\geq 0$

$$u(x,y)\equiv \mathrm{Re}f(x,y)=x^2-y^2 \quad , \quad v(x,y)\equiv \mathrm{Im}f(x,y)=2xy$$

e se $xy<0$

$$u(x,y)\equiv \mathrm{Re}f(x,y)=x^2-y^2 \quad , \quad v(x,y)\equiv \mathrm{Im}f(x,y)=-2xy$$

Temos então que se $xy>0$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=2x \quad , \quad \frac{\partial u}{\partial y}=-2y \quad , \quad \frac{\partial v}{\partial x}=2y \quad , \quad \frac{\partial v}{\partial y}=2x$$

e as condições de Cauchy-Riemann verificam-se para todo (x,y) tais que $xy>0$. Dado que as derivadas parciais de u e v são contínuas na mesma região, conclui-se que f é diferenciável em $\{z\in\mathbb{C}\,:\,\mathrm{Re}z\cdot\mathrm{Im}z>0\}$.

No caso em que $xy<0$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=2x \quad , \quad \frac{\partial u}{\partial y}=-2y \quad , \quad \frac{\partial v}{\partial x}=-2y \quad , \quad \frac{\partial v}{\partial y}=-2x$$

e as condições de Cauchy- Riemann não se verificam nesta região.

Por outro lado, observe que a função $v(x,y)=2|xy|$ não é diferenciável em $x\neq 0$ e $y=0$, nem em $x=0$ e $y\neq 0$, mas é diferenciável na origem, onde mais uma vez são satisfeitas as condições de Cauchy-Riemann.

Assim, concluímos que os pontos onde f possui $\mathbb{C}$-derivada são:

$$\{z\in\mathbb{C}\,:\,\mathrm{Re}z\cdot\mathrm{Im z}>0\}\cup\{0\}.$$

O maior aberto aonde f é diferenciável é a região de analiticidade de f:

$$\{z\in\mathbb{C}\,:\,\mathrm{Re}z\cdot\mathrm{Im z}>0\}.$$

(b) Para z na região de analiticidade $\{z\in\mathbb{C}\,:\,\mathrm{Re}z\cdot\mathrm{Im z}>0\}$ temos:

$$f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}(x,y)+i\frac{\partial v}{\partial x}(x,y)=2x+i2y=2z.$$

6. Considere a função $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ definida por

$$f(z)=f(x+iy)=\begin{cases} \frac{x^3-y^3}{x^2+y^2}+i\frac{x^3+y^3}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{se } (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

(a) Mostre que as equações de Cauchy-Riemann são verificadas em $(x,y)=(0,0)$.

(b) Verifique, utilizando a definição, que $f'(0)$ não existe.

(c) Porquê que isto não contradiz o Teorema de Cauchy-Riemann?

Resolução:

(a) Atendendo à definição de f, podemos escrever

$$u(x,y)=\begin{cases}\frac{x^3-y^3}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{se } (x,y)=(0,0)\end{cases}\quad,\quad v(x,y)=\begin{cases}\frac{x^3+y^3}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{se } (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

Tem-se então

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{u(h,0)-u(0,0)}{h}=1\quad,\quad \frac{\partial u}{\partial y}(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{u(0,h)-u(0,0)}{h}=-1$$

e

$$\frac{\partial v}{\partial x}(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{v(h,0)-v(0,0)}{h}=1\quad,\quad \frac{\partial v}{\partial y}(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{v(0,h)-v(0,0)}{h}=1,$$

É então óbvio que as condições de Cauchy-Riemann se verificam em $(x,y)=(0,0)$.

(b) Por definição

$$f'(0)=\lim_{z\to 0}\frac{f(z)-f(0)}{z}=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\frac{x^3-y^3}{x^2+y^2}+i\frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}}{x+iy}$$

Fazendo z convergir para 0 no eixo real (o que significa $x\to 0$ e $y=0$), obtem-se

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{x+ix}{x}=1+i$$

enquanto que, fazendo z convergir para 0 na recta $\{z\in\mathbb{C}:\mathrm{Re}z=\mathrm{Im}x\}$ (o que significa $x\to 0$ e $y=x$), obtem-se

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{ix}{x+ix}=\frac{i}{1+i}=\frac{1+i}{2}$$

Como $1+i\neq\frac{1+i}{2}$ conclui-se que o limite não existe e consequentemente f não admite derivada em $z=0$.

(c) As funções $u(x,y)$ e $v(x,y)$ embora tenham as derivadas parciais em $(0,0)$ não são diferenciáveis em $(0,0)$. Assim, a função f, vista como uma função de $\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$, não é diferenciavel em $(0,0)$.

7. Mostre que se f e $\overline{f}$ são ambas inteiras, então f é constante.

Resolução:

Recordemos que se f é analítica num conjunto aberto e conexo $A\subset\mathbb{C}$ e $f'(z)=0$, então f é constante. No nosso caso $A=\mathbb{C}$, logo basta verificar que $f'(z)=0$.

Escrevendo $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$, como f é analítica em $\mathbb{C}$, concluímos que as funções u e v satisfazem as equações de Cauchy-Riemann:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\qquad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Por outro lado, escrevendo $\overline{f}(x,y)=u(x,y)-iv(x,y)$, como $\overline{f}$ é analítica em $\mathbb{C}$, concluímos que as funções u e $-v$ satisfazem as equações de Cauchy-Riemann:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{\partial v}{\partial y},\qquad \frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Deste conjunto de equações concluímos que:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x} = 0.$$

Mas então:

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = 0,$$

como pretendíamos.

8. Seja $A \subset \mathbb{C}$ um aberto e defina $A^* = \{z \in \mathbb{C} : \bar{z} \in A\}$. Se f é uma função analítica em A mostre que $F(z) = \overline{f(\overline{z})}$ é uma função analítica em A^*.

   Resolução:

   Se escrevermos $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ e $F(z) = U(x,y) + iV(x,y)$, obtemos:

$$F(z) = \overline{f(\overline{z})} = u(x,-y) - iv(x,-y) = U(x,y) + iV(x,y).$$

   Ou seja, $U(x,y) = u(x,-y)$ e $V(x,y) = -v(x,-y)$. Como u e v são funções diferenciáveis em A, segue-se que U e V são funções diferenciáveis em A^*. Por outro lado, verificamos que U e V satisfazem as equações de Cauchy-Riemann em A^* da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial U}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x}u(x,-y) \\
&= \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{(x,-y)} = \left.\frac{\partial v}{\partial y}\right|_{(x,-y)} \\
&= \frac{\partial}{\partial y}(-v(x,-y)) = \frac{\partial V}{\partial y}, \\
\frac{\partial U}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y}u(x,-y) \\
&= -\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{(x,-y)} = \left.\frac{\partial v}{\partial x}\right|_{(x,-y)} \\
&= -\frac{\partial}{\partial x}(-v(x,-y)) = -\frac{\partial V}{\partial x},
\end{aligned}$$

   onde utilizámos que u e v satisfazem as equações de Cauchy-Riemann. Assim, podemos concluir que F é analítica em A^*.