Análise Matemática IV

Problemas para as Aulas Práticas

Semana 3

1. Determine os valores dos seguintes integrais:

   a) $\int_C |z|\, dz$ em que C é o semicírculo percorrido em sentido directo unindo $-2i$ a $2i$.

   b) $\int_C z\cos z^2 dz$ em que C é o segmento de recta unindo 0 a πi.

2. Considere o caminho γ_1 que consiste no segmento de recta unindo o ponto inicial 0 ao ponto final $\sqrt{2}e^{i\pi/4}$, e considere também o caminho γ_2 entre esses mesmos pontos dado pela parábola $t \mapsto t + it^2$.

   a) Calcule, utilizando a definição, $\int_{\gamma_k} e^z dz$, com $k = 1, 2$.

   b) Calcule $\int_{\gamma_k} \bar{z}^2 dz$ com $k = 1, 2$.

   c) Comente os resultados que obteve nas alíneas anteriores.

3. Seja

$$f(z) = z^{-1+i} = \exp[(-1+i)\log z] \quad , \quad |z| > 0 \ \text{ e } \ 0 < \arg z < 2\pi$$

   Calcule

$$\oint_{|z|=1} f(z)\, dz$$

   onde a curva é percorrida no sentido positivo.

4. Seja $\gamma(t) = Re^{it}$ para $0 \leq t \leq \pi$. Mostre que se $R > 2$, então

$$\left| \int_\gamma \frac{2z^2 - 1}{z^4 + 5z^2 + 4} dz \right| \leq \pi \frac{R(2R^2 + 1)}{(R^2 - 1)(R^2 - 4)}$$

5. Seja $\Gamma \subset \mathbb{C}$ a elipse $|z - \pi i| + |z - 2\pi i| = \frac{7\pi}{2}$, percorrida no sentido positivo. Calcule

   (a) $\oint_\Gamma z^3 \cosh z\, dz$

   (b) $\displaystyle\oint_\Gamma \frac{ze^{-z}}{z - \frac{i}{2}}\, dz$

   (c) $\displaystyle\oint_\Gamma \frac{1}{z^2 + \pi^2}\, dz.$

(d) $\displaystyle\oint_\Gamma \frac{5z-\pi i}{z^2(2z-i\pi)}dz$

(e) $\displaystyle\oint_\Gamma \frac{dz}{z^2(z-2\pi i)^3}$

(f) $\displaystyle\oint_\Gamma \frac{\cos z}{(z-i)^{11}}\,dz$.

6. Considere a função complexa definida por

$$f(z) = f(x+iy) = x^2 - y^2 - 2xy + 2y + i\left(x^2 - y^2 + 2xy - 2x\right).$$

Justificando pormenorizadamente a sua resposta, determine o valor do integral

$$\oint_C \frac{f(z)}{(z-2)^2}\,dz,$$

onde $C = \{z \in \mathbb{C} : |z-i| = 4\}$ é percorrida uma vez no sentido directo.

7. *Teorema de Liouville:* Mostre que se f é inteira e limitada então f é constante em $\mathbb{C}$.

Sugestão: Utilize a fórmula integral de Cauchy para mostrar que $f'(z) = 0$.