Análise Matemática IV - 2003/04
Problemas para as Aulas Práticas

Semana 4

1. Considere a seguinte função $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$:

$$u(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy(x+y)$$

   (a) Mostre que u é uma função harmónica.

   (b) Determine a função harmónica conjugada v tal que $v(0,0) = 0$.

   (c) Calcule

$$\oint_C \frac{f(z)}{(z-1)^2}\, dz \qquad \text{e} \qquad \oint_C \frac{f(z)}{z^3}\, dz$$

   onde $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$, $z = x + iy$ e C é a curva $\{z \in \mathbb{C} : |z| = 2\}$ percorrida no sentido positivo.

Resolução:

(a) É óbvio que u é uma função de classe $C^2(\mathbb{R}^2)$ visto ser uma função polinomial. Por outro lado

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 3x^2 - 6xy - 3y^2 \quad , \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 3y^2 - 3x^2 - 6xy$$

e

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 6x - 6y \quad , \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 6y - 6x$$

sendo então evidente que $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

(b) Por definição, u e v têm que verificar as condições de Cauchy-Riemann. Então

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} = 3x^2 - 6xy - 3y^2 \quad \Rightarrow \quad v(x,y) = \int (3x^2 - 6xy - 3y^2)dy$$

ou seja

$$v(x,y) = 3x^2y - 3xy^2 - y^3 + C_1(x)$$

Por outro lado

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\partial}{\partial x}\Big(3x^2y - 3xy^2 - y^3 + C_1(x)\Big) = -3y^2 + 3x^2 + 6xy$$

pelo que

$$C_1'(x) = 3x^2 \quad \Rightarrow \quad C_1(x) = x^3 + C \quad \Rightarrow \quad v(x,y) = 3x^2y - 3xy^2 - y^3 + x^3 + C$$

Dado que $v(0,0) = 0$ tem-se que $C = 0$ e finalmente $v(x,y) = 3x^2y - 3xy^2 - y^3 + x^3$.

(c) Pela alínea anterior, a função

$$f(z) = f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$$

é uma função inteira, pelo que $\dfrac{f(z)}{(z-1)^2}$ é analítica em $\mathbb{C} \setminus \{1\}$. Como $1 \in \operatorname{int} C$, e C é uma curva simples e fechada, estamos nas condições de utilizar a fórmula integral de Cauchy generalizada ($n = 1$),

$$\begin{aligned}
\oint_C \frac{f(z)}{(z-1)^2} dz &= 2\pi i f'(1) = 2\pi i \Big(\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{(1,0)} + i\frac{\partial v}{\partial x}\Big|_{(x,y)=(1,0)}\Big) \\
&= 2\pi i \Big(3x^2 - 6xy - 3y^2 + i(6xy - 3y^2 + 3x^2)\Big|_{(x,y)=(1,0)}\Big) \\
&= 6\pi i(1+i)
\end{aligned}$$

O segundo integral pode ser calculado como o anterior utilizando, neste caso, a fórmula integral de Cauchy com $n = 2$. Alternativamente, e atendendo a que

$$\begin{aligned}
f(z) &= x^3 + y^3 - 3xy^2 - 3x^2y + i(3x^2y - 3xy^2 - y^3 + x^3) \\
&= x^3 + 3x^2(iy) + 3x(iy)^2 + (iy)^3 + y^3 - 3(ix)y^2 + 3(ix)^2y - (ix)^3 \\
&= (x+iy)^3 + (y-ix)^3 \\
&= z^3 + iz^3 \;=\; (1+i)z^3,
\end{aligned}$$

então, pelo Teorema de Cauchy:

$$\oint_C \frac{f(z)}{z^3} dz = \oint_C (1+i) dz = 0.$$

2. Considere a função $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definida por $g(z) = z(z^2 + \overline{z}^2 - |z|^2)$, e sejam u e v funções de $\mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}$ tais que $u(x,y) = \operatorname{Re}[g(x+iy)]$ e $v(x,y) = \operatorname{Im}[g(x+iy)]$.

   (a) Determine o conjunto dos pontos onde u e v satisfazem as equações de Cauchy–Riemann. O que pode concluir sobre a analiticidade da função g?

   (b) Mostre que u é uma função harmónica.

(c) Determine uma função $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, analítica em $\mathbb{C}$, tal que $Re\,(f) = u$.

Resolução:

(a) Fazendo $z = x + iy$

$$\begin{aligned} g(z) &= z(z^2 + \overline{z}^2 - |z|^2) \quad = \quad (x+iy)((x+iy)^2 + (x-iy)^2 - (x^2+y^2)) \\ &= x^3 - 3xy^2 + i(x^2y - 3y^3) \end{aligned}$$

pelo que

$$\operatorname{Re} f \equiv u(x,y) = x^3 - 3xy^2 \quad \text{e} \quad \operatorname{Im} f \equiv v(x,y) = x^2y - 3y^3$$

Calculando as derivadas parciais

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 3x^2 - 3y^2 \quad , \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -6xy$$

e

$$\frac{\partial v}{\partial x} = 2xy \quad , \quad \frac{\partial v}{\partial y} = x^2 - 9y^2$$

É óbvio que todas estas funções são contínuas em $\mathbb{R}^2$, visto serem funções polinomiais. Por outro lado

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \Leftrightarrow \quad 2x^2 + 6y^2 = 0$$

e

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \quad \Leftrightarrow \quad xy = 0$$

Conclui-se que as condições de Cauchy-Riemann se verificam sse $(x,y) = (0,0)$, pelo que a função admite derivada apenas em $z = 0$ e consequentemente o seu domínio de analiticidade é o conjunto vazio.

(b) Como já se referiu, $u(x,y) = x^3 - 3xy^2$ é uma função de classe $C^2(\mathbb{R}^2)$ visto ser polinomial. Por outro lado

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 3x^2 - 3y^2 \quad , \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -6xy$$

e

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 6x \quad , \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -6x$$

e é óbvio que $\Delta u = 0$ para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

(c) Denotaremos a harmónica conjugada de u por $\tilde{v}$. Por definição, u e $\tilde{v}$ têm que verificar as condições de Cauchy-Riemann. Então

$$\frac{\partial \tilde{v}}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} = 3x^2 - 3y^2 \quad \Rightarrow \quad \tilde{v}(x,y) = \int (3x^2 - 3y^2)dy = 3x^2y - y^3 + C_1(x)$$

Por outro lado

$$\frac{\partial \tilde{v}}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial}{\partial x}\Big(3x^2y - y^3 + C_1(x))\Big) = 6xy$$

pelo que

$$C_1'(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad C_1(x) = C \quad \Rightarrow \quad \tilde{v}(x,y) = 3x^2y - y^3 + C$$

Note que, como seria de esperar atendendo ao resultado da alínea (a), a conjugada harmónica de u, $\tilde{v}$, é distinta de v.

3. Calcule os região de convergência das seguintes séries de potências:

(a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{z}{\sqrt{2}} - i\sqrt{2}\right)^n}{n^4+1}$ **(b)** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n}(z+1-i)^n$ **(c)** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}(z+1)^n$

Resolução:

(a) Note-se que

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{z}{\sqrt{2}} - i\sqrt{2}\right)^n}{n^4+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n (z-2i)^n}{n^4+1}$$

pelo que se trata de uma série de potências da forma $\sum a_n(z-2i)^n$. Tem-se então (caso o limite exista):

$$R = \lim_n \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_n \frac{\frac{(1/\sqrt{2})^n}{n^4+1}}{\frac{(1/\sqrt{2})2^{n+1}}{(n+1)^4+1}} = \sqrt{2}\ \lim_n \frac{(n+1)^4+1}{n^4+1} = \sqrt{2}.$$

Assim, a série é convergente na região:

$$\{z \in \mathbb{C} \,:\, |z-2i| < \sqrt{2}\}.$$

(b) Trata-se de uma série de potências da forma $\sum a_n(z+1-i)^n$. Tem-se então:

$$1/R = \limsup_n \sqrt[n]{|a_n|} = \limsup_n \frac{1}{n} = 0$$

pelo que $R = +\infty$. Consequentemente, a série é convergente em $\mathbb{C}$.

(c) Trata-se de uma série de potências da forma $\sum a_n(z+1)^n$. Tem-se então, caso o limite exista

$$R = \lim_n \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_n \frac{\frac{n!}{n^n}}{\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}} = e$$

e a série é convergente na região

$$\{z \in \mathbb{C} \,:\, |z+1| < e\}$$

4. Considere a seguinte série de potências

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\, z^n \qquad \text{onde} \qquad a_n = \begin{cases} 5^n & \text{se} \quad n \text{ par} \\ (-2)^n & \text{se} \quad n \text{ impar} \end{cases} .$$

Sabendo que esta é a série de Taylor em torno de $z_0 = 0$ de uma função f, analítica em todo o seu domínio, calcule $f(1)$.

Resolução:

Dado que as duas subsucessões de a_n são $(-2)^n$ e 5^n, vê-se fácilmente que:

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \begin{cases} 5 & \text{se} \quad n \text{ par} \\ 2 & \text{se} \quad n \text{ impar} \end{cases}$$

Logo:

$$\limsup_n \sqrt[n]{|a_n|} = 5.$$

Tem-se então que a série converge na região

$$\{z \in \mathbb{C} \,:\, |z| < \frac{1}{5}\}$$

Assim sendo, a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ diverge em $z = 1$, pelo que é impossível calcular o valor de $f(1)$ por substituição de $z = 1$ naquela série. Porém, na região $|z| < \frac{1}{5}$, temos:

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \\ &= \sum_{n \text{ par}} 5^n z^n + \sum_{n\, impar} (-2)^n z^n \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} 5^{2m} z^{2m} + \sum_{m=0}^{\infty} (-2)^{2m+1} z^{2m+1} \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \left((5z)^2\right)^m - 2z \sum_{m=0}^{\infty} \left((2z)^2\right)^m \\ &= \frac{1}{1-25z^2} - \frac{2z}{1-4z^2} \end{aligned}$$

Como f é analítica em todo o seu domínio, concluimos que:

$$f(z) = \frac{1}{1-25z^2} - \frac{2z}{1-4z^2}\,, \qquad \text{para qualquer } z \in \mathbb{C} \setminus \left\{\pm\frac{1}{5}, \pm\frac{1}{2}\right\}\,,$$

o que implica que $f(1) = \frac{5}{8}$

5. Determine os desenvolvimentos de Taylor das seguintes funções em torno dos seguintes pontos:

   (a) $\sin z$, em torno de $z = \pi$.
   (b) e^{2z} , em torno de $z = i\pi$.
   (c) $z^2 e^z$, em torno de $z = 1$.
   (d) Valor principal de $\log z$ em torno de $z = i - 1$.

   Resolução:
   (a) Para todo $z \in \mathbb{C}$

$$\sin z = \sin(z + \pi - \pi) = -\sin(z - \pi) = -\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(z-\pi)^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

   (b) Para todo $z \in \mathbb{C}$

$$e^{2z} = e^{2(z-i\pi)} e^{2i\pi} = e^{2(z-i\pi)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n!} (z - i\pi)^n$$

   (c) Para todo $z \in \mathbb{C}$

$$\begin{aligned} z^2 e^z &= (z-1+1)^2 e^{z-1+1} = [(z-1)^2 + 2(z-1) + 1]\mathrm{e} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-1)^n}{n!} \\ &= \mathrm{e} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-1)^{n+2}}{n!} + 2\mathrm{e} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-1)^{n+1}}{n!} + \mathrm{e} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-1)^n}{n!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-1)^n \end{aligned}$$

   em que

$$a_n = \begin{cases} \mathrm{e} & \text{se } n = 0 \\ 3\mathrm{e} & \text{se } n = 1 \\ \dfrac{\mathrm{e}}{(n-2)!} + \dfrac{2\mathrm{e}}{(n-1)!} + \dfrac{\mathrm{e}}{n!} & \text{se } n \geq 2 \end{cases}$$

   (d) Para todo o z em $D = \mathbb{C} \setminus \{x + iy \in \mathbb{C} : y = 0 \text{ e } x \leq 0\}$ (o domínio de analiticidade do v.p. do logaritmo):

$$(\log z)' = \frac{1}{z} = \frac{1}{z - i + 1 + i - 1} = \frac{\frac{1}{i-1}}{1 + \frac{z-i+1}{i-1}} = \frac{1}{i-1} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{z-i+1}{i-1} \right)^n, \qquad (1)$$

para $|z+i-1|<|i-1|=\sqrt{2}$. Primitivando, obtem-se:

$$\log z = C + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (z-i+1)^{n+1}}{(n+1)(i-1)^{n+1}} = C + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}(z-i+1)^n}{n(i-1)^n}.$$

Esta igualdade é válida no maior disco centrado em $z-i+i$ que não intersecta o semieixo real negativo, ou seja, para $|z+i-1|<1$. Note-se que este disco está contido no domínio de convergência da série (1). Finalmente, fazendo $z=i-1$ na igualdade anterior, obtem-se $C=\log(i-1)$. Assim:

$$\log z = \frac{1}{2}\log 2 + i\frac{3\pi}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}(z-i+1)^n}{n(i-1)^n},$$

para $|z-i+1|<1$.

6. Para cada função e região indicada, determine as séries de Laurent respectivas:

(a) $\dfrac{1}{z-1}$, $|z|>1$

Resolução:

Dado que $|z|>1$ (o que implica $\left|\frac{1}{z}\right|<1$), é válido o desenvolvimento

$$\frac{1}{z-1} = \frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{z}} = \frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{z}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{z}\right)^{n+1}$$

(b) $z^5\left(e^{\frac{1}{z}}+z\right)$, $|z|>0$

Resolução:

Para $z\neq 0$, é válido

$$z^5\left(e^{\frac{1}{z}}+z\right) = z^5\Big(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!z^n}+z\Big) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!z^{n-5}}+z^6$$

(c) $\dfrac{z-i}{(z-2i)^2}$, $|z-i|>1$

Resolução:

Para $|z-i|>1$ (o que implica $\dfrac{1}{|z-i|}<1$), tem-se que

$$\begin{aligned}
\frac{1}{(z-2i)^2} &= \frac{d}{dz}\Big(\frac{1}{z-2i}\Big) = -\frac{d}{dz}\Big(\frac{1}{z-i-i}\Big) \\
&= -\frac{d}{dz}\Big(\frac{1}{z-i}\cdot\frac{1}{1-\frac{i}{z-i}}\Big) = -\frac{d}{dz}\Big(\frac{1}{z-i}\sum_{n=0}^{\infty}\Big(\frac{i}{z-i}\Big)^n\Big) \\
&= -\frac{d}{dz}\Big(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{i^n}{(z-i)^{n+1}}\Big)
\end{aligned}$$

Usando o facto de a série geométrica ser uniformemente convergente na região $\{z\,:\,|\frac{1}{z-i}|<r\}$ para todo $r<1$, podemos derivar termo a termo, obtendo-se

$$\frac{1}{(z-2i)^2} = -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{d}{dz}\Big(\frac{i^n}{(z-i)^{n+1}}\Big) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{i^n(n+1)}{(z-i)^{n+2}}$$

Finalmente

$$\frac{z-i}{(z-2i)^2} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{i^n(n+1)}{(z-i)^{n+1}} \quad \text{para} \quad |z-i|>1$$

(d) $\big(3z^2-1\big)\,\mathrm{sen}\left(\dfrac{\pi z^3+z}{z^3}\right)$, $|z|>0$.

Resolução:

Para $|z|>0$

$$\begin{aligned}
\big(3z^2-1\big)\,\mathrm{sen}\left(\frac{\pi z^3+z}{z^3}\right) &= (3z^2-1)\mathrm{sen}(\pi+\frac{1}{z^2}) = (1-3z^2)\mathrm{sen}(\frac{1}{z^2}) \\
&= (1-3z^2)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\Big(\frac{1}{z^2}\Big)^{2n+1} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!z^{4n+2}} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{3(-1)^{n+1}}{(2n+1)!z^{4n}}
\end{aligned}$$

7. Determine a série de Laurent de $\frac{1}{(z^2-1)^2}$ nas seguintes regiões:

   (a) $0<|z-1|<2$.

   (b) $2<|z-1|$.

e calcule os seguintes integrais:

(a) $\displaystyle\oint_{|z-1|=1} \frac{1}{(z^2-1)^2}\, dz$.

(b) $\displaystyle\oint_{|z-1|=3} \frac{1}{(z^2-1)^2}\, dz$

Resolução:

(a) Para qualquer $z \in \mathbb{C} \setminus \{-1, 1\}$, tem-se que

$$\frac{1}{(z^2-1)^2} = \frac{1}{(z-1)^2(z+1)^2} = \frac{1}{(z-1)^2} \cdot \frac{d}{dz}\Big(\frac{-1}{z+1}\Big)$$

Para $0 < |z-1| < 2$, é válido

$$\begin{aligned} \frac{1}{(z^2-1)^2} &= \frac{1}{(z-1)^2} \cdot \frac{d}{dz}\Big(\frac{-1}{2+z-1}\Big) = \frac{1}{(z-1)^2}\frac{d}{dz}\Big(\frac{-1}{2(1+\frac{z-1}{2})}\Big) \\ &= \frac{-1}{2(z-1)^2} \cdot \frac{d}{dz}\sum_{n=0}^{\infty}\Big(-\frac{z-1}{2}\Big)^n \end{aligned}$$

Pela convergência uniforme da série geométrica, podemos derivar termo a termo e obter

$$\frac{1}{(z^2-1)^2} = \frac{-1}{2(z-1)^2}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n n\frac{(z-1)^{n-1}}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1} n\frac{(z-1)^{n-3}}{2^{n+1}}$$

Por outro lado, se $|z-1| > 2$ (o que implica $\dfrac{2}{|z-1|} < 1$), tem-se que

$$\begin{aligned} \frac{1}{(z^2-1)^2} &= \frac{1}{(z-1)^2} \cdot \frac{d}{dz}\Big(\frac{-1}{2+z-1}\Big) = \frac{1}{(z-1)^2} \cdot \frac{d}{dz}\Big(\frac{-1}{z-1} \cdot \frac{1}{1+\frac{2}{z-1}}\Big) \\ &= \frac{1}{(z-1)^2} \cdot \frac{d}{dz}\Big(\frac{-1}{z-1}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-2)^n}{(z-1)^n}\Big) = \frac{1}{(z-1)^2} \cdot \frac{d}{dz}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}2^n}{(z-1)^{n+1}} \\ &= \frac{1}{(z-1)^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}2^n(-n-1)}{(z-1)^{n+2}} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n 2^n(n+1)}{(z-1)^{n+4}} \end{aligned}$$

(b) Por definição, para qualquer $n \in \mathbb{Z}$

$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz$$

é o coeficiente de $(z-z_0)^n$ da série de Laurent de f convergente na região $r < |z-z_0| < R$, para qualquer curva de Jordan C, seccionalmente regular, percorrida em sentido directo, contida na região de convergência. Sendo assim, e atendendo a que a circunferência $|z-1| = 1$ é uma curva de Jordan e está contida na região $0 < |z-1| < 2$, o integral pedido

$$\oint_{|z-1|=1} \frac{1}{(z^2-1)^2} dz = \oint_{|z-1|=1} \frac{f(z)}{(z-1)^0} dz = 2\pi i\, a_{-1}$$

em que a_{-1} é o coeficiente de $\frac{1}{z-1}$ da primeira série obtida em (a). Assim,

$$\oint_{|z-1|=1} \frac{1}{(z^2-1)^2} dz = 2\pi i(-\frac{1}{4}) = -\frac{\pi i}{2}$$

Analogamente, e dado que a circunferência $|z-1| = 3$ é uma curva de Jordan e está contida na região $|z-1| > 2$, o integral pedido

$$\oint_{|z-1|=3} \frac{1}{(z^2-1)^2} dz = \oint_{|z-1|=3} \frac{f(z)}{(z-1)^0} dz = 2\pi i\, a_{-1}$$

em que a_{-1} é o coeficiente de $\frac{1}{z-1}$ da segunda série obtida em (a). Assim,

$$\oint_{|z-1|=1} \frac{1}{(z^2-1)^2} dz = 0$$

8. Seja $P(z)$ um polinómio e γ uma curva simples e fechada em $\mathbb{C}$, percorrida uma vez no sentido directo, e que não intersecta o conjunto dos zeros de $P(z)$. Mostre que o valor de

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma \frac{P'(z)}{P(z)} dz$$

é igual ao número de zeros (contando multiplicidades) de $P(z)$ que pertencem ao interior da curva γ.

Resolução:

Se $P(z) = a_n z^n + \cdots + a_1 z + a_0$ é um polinómio de grau n então, pelo Teorema Fundamental da Álgebra:

$$P(z) = a_n(z-z_1)(z-z_2)\cdots(z-z_n)$$

onde $z_1, \ldots, z_n$ são os zeros de $P(z)$ (alguns dos factores podem aparecer repetidos). Então:

$$\frac{P'(z)}{P(z)} = \frac{d}{dz} \log P(z) = \frac{d}{dz}\left(\log a_0 + \sum_{k=1}^{n} \log(z-z_k)\right) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{z-z_k}.$$

Desta forma:

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma \frac{P'(z)}{P(z)}\,dz = \frac{1}{2\pi i}\sum_{k=1}^{n}\oint_\gamma \frac{1}{z-z_k}dz$$

Calculando

$$\oint_\gamma \frac{1}{z-z_k}\,dz \;=\; \begin{cases} 0 & \text{se} \quad z_k \notin \operatorname{int}\gamma, \\ 2\pi i & \text{se} \quad z_k \in \operatorname{int}\gamma, \end{cases}$$

obtem-se o resultado.