Análise Matemática IV

Problemas para as Aulas Práticas

Semana 6

1. Determine todas as soluções das seguintes equações diferenciais ordinárias lineares

a) $\dfrac{dy}{dx} + y = 2 + 2x$	b) $\psi' = \psi - t$
c) $x\dfrac{dy}{dx} + 2y = (x-2)e^x$	d) $\dfrac{di}{dt} - 6i = 10\,\mathrm{sen}(2t)$
e) $\dfrac{dy}{dt} = y(\dfrac{1}{t} - \mathrm{tg}\, t) + t\cos t$	f) $(1+y^2)\dfrac{dx}{dy} = \mathrm{arctg}\, y - x$

2. Determine as soluções dos seguintes problemas de Cauchy

   a) $xy' = 2y + x^3 e^x \; y(1) = 0,$

   b) $\dfrac{dv}{du} + \dfrac{2u}{1+u^2}v - \dfrac{1}{1+u^2} = 0, \; v(0) = 1.$

   c) $\begin{cases} x' + h(t)x - t = 0, \\ x(-1) = 2 \end{cases}$, com $h(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t < 0 \\ t & \text{se } t \geq 0 \end{cases}$

3. De acordo com a lei de arrefecimento de Newton, a taxa de arrefecimento de uma substância numa corrente de ar, é proporcional à diferença entre a temperatura da substância e a do ar. Assumindo que a temperatura do ar é 30^o e que a substância arrefece de 100^o para 70^o em 15m, determine o tempo que a substância demora a atingir a temperatura de 40^o.

4. Determine todas as soluções das seguintes equações diferenciais ordinárias

   a) $x' = \frac{2}{t^2-1}, \quad |t| \neq 1.$

   b) $x^3 + (y+1)^2 \frac{dy}{dx} = 0$

   c) $\varphi' = e^{\varphi - t}.$

   d) $xy + (1+x^2)y' = 0$

   e) $y' = 1 - x + y^2 - xy^2.$

5. Resolva o problema de Cauchy $\varphi(\theta)\varphi'(\theta) = \theta, \varphi(1) = \alpha$ e determine para que valores de α é que a solução está definida para todo o $\theta \in \mathbb{R}$.

6. Considere a equação diferencial separável $x' = x\,\mathrm{sen}\, t + x^2\,\mathrm{sen}\, t$. Determine a solução desta equação que satisfaz a condição inicial $x(\frac{\pi}{2}) = -2$, e determine o seu intervalo máximo de existência.

7. Considere a equação diferencial

$$\dot{y} = f(at + by + c)$$

em que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função contínua.

a) Mostre que a substituição $v = at + by + c$, transforma a equação numa equação separável.

b) Resolva o seguinte problema de valor inicial

$$\dot{y} = e^{2t+y-1} - 2 \quad , \quad y(0) = 1$$

indicando o intervalo máximo de solução.

8. Considere a equação diferencial

$$2x\frac{dy}{dx} + 2xy^5 - y = 0$$

(a) Determine a solução geral da equação efectuando a mudança de variável $v = y^{-4}$.

(b) Determine a solução que verifica $y(1) = 1$, indicando o seu intervalo máximo de existência.

9. Determine a solução geral da equação diferencial

$$x^2 \cos y \frac{dy}{dx} = 2x \operatorname{sen} y - 1$$

Sugestão: Efectue a mudança de variável $v = \operatorname{sen} y$