Análise Matemática IV

Problemas para as Aulas Práticas

Semana 7

1. Determine a solução da equação diferencial

$$\frac{d\,y}{d\,t} = \frac{t^2 + 3y^2}{2ty} \quad , \quad t > 0 \quad \text{e} \quad y > 0$$

que verifica a condição inicial $y(1) = -1$ e indique o intervalo máximo de definição da solução.
Sugestão: Considere a mudança de varável $v = y/t$.

2. Determine a solução do problema de Cauchy

$$3t^2 + 4tx + (2x + 2t^2)x' = 0 \qquad , \qquad x(0) = 1$$

e esclareça qual é o seu intervalo máximo de existência.

3. Considere a equação diferencial

$$\frac{y}{x} + \left(y^3 - \log x\right)\frac{dy}{dx} = 0 \tag{1}$$

a) Verifique que (1) tem um factor integrante da forma $\mu = \mu(y)$ e determine-o.

b) Prove que as soluções de (1) são dadas implicitamente por $\Phi(x, y) = C$, onde C é uma constante arbitrária e

$$\Phi(x, y) = \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{y}\log x$$

c) Determine a solução de (1) que satisfaz a condição inicial $y(1) = \sqrt{2}$.

4. Considere a equação diferencial

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{4y^2 + 2x}$$

a) Mostre que esta equação tem um factor integrante $\mu = \mu(y)$.

b) Determine a solução que satisfaz a condição inicial $y(1) = 1$.

c) Determine o intervalo máximo de existência da solução que calculou na alínea anterior.

5. a) Determine em que condições uma equação da forma

$$M(t, x) + N(t, x)x' = 0$$

admite um factor integrante que é uma função de t, isto é, da forma $\mu(t)$, para uma certa função real de variável real μ, e escreva uma equação diferencial ordinária satisfeita por μ.

b) Considere a equação diferencial ordinária

$$\frac{x}{t} - \operatorname{sen}(t) + x' = 0 \tag{2}$$

Mostre que a equação não é exacta. Use o resultado da alínea (a) para determinar a solução da equação (2) que satisfaz a condição inicial $x(\pi) = 1$. Indique o intervalo máximo de definição da solução obtida.

6. Considere o problema de valor inicial:

$$\begin{cases} y^2\left(\dfrac{1}{x} + \log x\right) + 2y \log x \dfrac{dy}{dx} &= 0 \\ \\ y(e) &= -1 \end{cases}$$

Obtenha explicitamente a solução deste problema e determine o seu intervalo máximo de definição.

7. Considere a equação diferencial ordinária

$$\left(4x^2y + 3xy^2 + 2y^3\right) + \left(2x^3 + 3x^2y + 4xy^2\right)\frac{dy}{dx} = 0 \tag{3}$$

a) Mostre que (3) tem um factor integrante do tipo $\mu = \mu(xy)$.

b) Mostre que a solução de (3) com condição inicial $y(-1) = 1$ é dada implicitamente pela expressão $x^4y^2 + x^3y^3 + x^2y^4 = 1$.

c) Determine o polinómio de Taylor de segunda ordem, no ponto -1, da solução dada implicitamente na alínea anterior.