Análise Matemática IV

Problemas para as Aulas Práticas

$\boxed{\text{Semana 7}}$

1. Determine a solução da equação diferencial

$$\frac{dy}{dt} = \frac{t^2+3y^2}{2ty} \quad , \quad t>0$$

que verifica a condição inicial $y(1)=-1$ e indique o intervalo máximo de definição da solução.
Sugestão: Considere a mudança de varável $v=y/t$.

Resolução:

Fazendo $v=\frac{y}{t}$, ou seja $y=tv$, obtemos

$$\frac{d}{dt}(tv(t)) = \frac{t^2+3(tv)^2}{2t(tv)} \;\Leftrightarrow\; v+tv' = \frac{1+3v^2}{2v}$$

A equação é separável, e pode ser escrita na forma

$$\frac{2v}{1+v^2}v' = \frac{1}{t} \;\Leftrightarrow\; \frac{d}{dt}\Big(\int \frac{2v}{1+v^2}\,dv\Big) = \frac{1}{t} \;\Leftrightarrow\; \log(1+v^2) = \log t + c$$

pelo que

$$v^2(t) = kt-1$$

Desfazendo a mudança de variável

$$y^2(t) = t^2(kt-1)$$

e dado que $y(1)=-1<0$, a solução do PVI é

$$y(t) = -\sqrt{t^2(2t-1)}$$

Para calcular o intervalo máximo de solução, note-se que, a equação diferencial faz sentido se $t\neq 0$ e $y(t)\neq 0$. Então, o intervalo máximo de solução, I, será o maior intervalo verificando

$t_0 = 1 \in I$

$0 \notin I$

$y(t)\neq 0$ para todo $t\in I$.

Visto

$$y(t)=0 \;\Leftrightarrow\; t=0 \text{ ou } t=\frac{1}{2}$$

conclui-se que $I =]\frac{1}{2},\infty[$.

2. Determine a solução do problema de Cauchy

$$3t^2 + 4tx + (2x + 2t^2)x' = 0 \qquad , \qquad x(0) = 1$$

e esclareça qual é o seu intervalo máximo de existência.

Resolução:

Note-se em primeiro lugar que a equação não é linear nem separável. Resta-nos investigar se será uma equação exacta (ou reduível a exacta). A equação é da forma

$$M(t,x) + N(t,x)\frac{dx}{dt} = 0$$

em que

$$M(t,x) = 3t^2 + 4tx \qquad , \qquad N(t,x) = 2x + 2t^2$$

Dado que ambas as funções são polinomiais, serão de classe C^1 em $\mathbb{R}^2$, e

$$\frac{\partial M}{\partial x} = 4t = \frac{\partial N}{\partial t}$$

concluimos que se trata de uma equação exacta, pelo que existe $\Phi(t,x) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, tal que $\nabla\Phi = (M, N)$ e $\Phi(t,x) = C$ define implicitamente a solução da equação diferencial. Para calcular Φ

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = 3t^2 + 4tx \;\Rightarrow\; \Phi(t,x) = \int (3t^2 + 4tx)\, dt = t^3 + 2t^2 x + c(x)$$

Por outro lado

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = N(t,x) \;\Rightarrow\; 2t^2 + c'(x) = 2x + 2t^2 \;\Rightarrow\; c(x) = x^2 + c$$

Tem-se então que

$$\Phi(t,x) = t^3 + 2t^2 x + x^2 = C$$

define implicitamente a solução da equação diferencial. Dado que $x(0) = 1$, conclui-se que $C = 1$, e atendendo a que $N(0,1) = 2 \neq 0$

$$t^3 + 2t^2 x + x^2 - 1 = 0$$

define implicitamente a solução do PVI para t numa vizinhança da condição inicial $t_0 = 0$. Resolvendo a equação em ordem a x, obtemos a solução explícita do PVI

$$x(t) = -t^2 + \sqrt{t^4 - t^3 + 1}$$

Fazendo o estudo da função

$$p(t) = t^4 - t^3 + 1$$

conclui-se que p tem dois extremos locais em $t = 0$ e $t = \frac{3}{4}$. Visto p ser um polinómio de grau 4 (o que implica $\lim\limits_{t\to\pm\infty} p(t) = +\infty$) podemos concluir que um deles é necessáriamente um mínimo absoluto. Fazendo as contas conclui-se que o minimizante é $\frac{3}{4}$, pelo que

$$t^4 - t^3 + 1 \geq \left(\frac{3}{4}\right)^4 - \left(\frac{3}{4}\right)^3 + 1 > 0$$

para todo $t \in \mathbb{R}$, pelo que o intervalo máximo de solução é $\mathbb{R}$.

3. Considere a equação diferencial

$$\frac{y}{x} + \left(y^3 - \log x\right) \frac{dy}{dx} = 0 \tag{1}$$

a) Verifique que (1) tem um factor integrante da forma $\mu = \mu(y)$ e determine-o.

b) Prove que as soluções de (1) são dadas implicitamente por $\Phi(x, y) = C$, onde C é uma constante arbitrária e

$$\Phi(x, y) = \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{y}\log x$$

c) Determine a solução de (1) que satisfaz a condição inicial $y(1) = \sqrt{2}$.

Resolução:

(a) Sendo

$$M(x, y) = \frac{y}{x} \qquad , \qquad N(x, y) = y^3 - \log x$$

é óbvio que

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{1}{x} \neq \frac{\partial N}{\partial x} = -\frac{1}{x}$$

pelo que teremos que investigar a existência de um factor integrante. Vamos averiguar se existirá $\mu(y)$ (como sugerido, tal que a equação

$$\mu(y)\frac{y}{x} + \mu(y)\left(y^3 - \log x\right)\frac{dy}{dx} = 0$$

é exacta, isto é verifica

$$\frac{\partial}{\partial y}\Big(\mu(y)\frac{y}{x}\Big) = \frac{\partial}{\partial x}\Big(\mu(y)\left(y^3 - \log x\right)\Big)$$

Efectuando as derivadas

$$\mu'(y)\frac{y}{x} + \mu(y)\frac{1}{x} = -\mu(y)\frac{1}{x}$$

e para $x \neq 0$, $y \neq 0$ obtemos

$$\mu'(y) = -\frac{2}{y}\mu(y)$$

pelo que, resolvendo a equação

$$\mu(y) = y^{-2}$$

é um factor integrante da equação.

(b) Por construção, a equação

$$\frac{1}{xy} + (y - \frac{\log(x)}{y^2})y' = 0$$

é exacta, pelo que existe $\Phi : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ verifcando

$$\nabla\Phi(x, y) = (\frac{1}{xy}, y - \frac{\log(x)}{y^2})$$

e $\Phi(x,y)=C$ define implicitamente a solução da equação diferencial. Para calcular Φ

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x}=\frac{1}{xy} \Leftrightarrow \Phi(x,y)=\frac{1}{y}\log x+c(y)$$

e

$$\frac{\partial\Phi}{\partial y}=y-\frac{\log(x)}{y^2} \Leftrightarrow -\frac{1}{y^2}\log x+c'(y)=y-\frac{\log(x)}{y^2} \Leftrightarrow c(y)=\frac{y^2}{2}+c$$

e finalmente

$$\Phi(x,y)=\frac{1}{y}\log x+\frac{y^2}{2}=C$$

define implicitamente a solução da equação diferencial como se queria mostrar.

(c) Dado que $y(1)=\sqrt{2}$, tem-se $C=1$, e visto $N(1,\sqrt{2})=2\sqrt{2}\neq 0$, o Teorema da função Implícita garante existência e unicidade de solução do PVI, definida pela equação

$$\frac{1}{y}\log x+\frac{y^2}{2}-1=0$$

para x numa vizinhança de $x_0=1$.

4. Considere a equação diferencial

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{y}{4y^2+2x}$$

a) Mostre que esta equação tem um factor integrante $\mu=\mu(y)$.

b) Determine a solução que satisfaz a condição inicial $y(1)=1$.

c) Determine o intervalo máximo de existência da solução que calculou na alínea anterior.

Resolução:

(a) A equação pode ser escrita na forma

$$y+(4y^2+2x)\frac{dy}{dx}=0$$

Fazendo

$$M(x,y)=y \qquad , \qquad N(x,y)=4y^2+2x$$

é óbvio que

$$\frac{\partial M}{\partial y}=1\neq\frac{\partial N}{\partial x}=2$$

pelo que teremos que investigar a existência de um factor integrante. Vamos averiguar se existirá $\mu(y)$ (como sugerido), tal que a equação

$$\mu(y)y+\mu(y)\left(4y^2+2x\right)\frac{dy}{dx}=0$$

é exacta, isto é verifica

$$\frac{\partial}{\partial y}\Big(\mu(y)y\Big)=\frac{\partial}{\partial x}\Big(\mu(y)\left(4y^2+2x\right)\Big)$$

Efectuando as derivadas

$$\mu'(y)y + \mu(y) = 2\mu(y)$$

e para $y \neq 0$ obtemos

$$\mu'(y) = \frac{1}{y}\mu(y)$$

pelo que, resolvendo a equação

$$\mu(y) = y$$

é um factor integrante da equação.

(b) Por construção, a equação

$$y^2 + (4y^3 + 2xy)y' = 0$$

é exacta, pelo que existe $\Phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ verifcando

$$\nabla\Phi(x, y) = (y^2, 4y^3 + 2xy)$$

e $\Phi(x, y) = C$ define implicitamente a solução da equação diferencial. Para calcular Φ

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x} = y^2 \;\Leftrightarrow\; \Phi(x, y) = xy^2 + c(y)$$

e

$$\frac{\partial\Phi}{\partial y} = 4y^3 + 2xy \;\Leftrightarrow\; 2xy + c'(y) = 4y^3 + 2xy \;\Leftrightarrow\; c(y) = y^4 + c$$

e finalmente

$$\Phi(x, y) = xy^2 + y^4 = C$$

define implicitamente a solução da equação diferencial. Dado que $y(1) = 1$, tem-se que $C = 2$. Por outro lado $N(1, 1) = 6 \neq 0$, o Teorema da Função Implícita garante a existência de solução única do PVI, definida por

$$xy^2 + y^4 - 2 = 0 \tag{2}$$

para x numa vizinhança de $x_0 = 1$.

(c) Para calcular o intervalo máximo de solução, note-se que, resolvendo a equação (5) em ordem a y

$$y(x) = \sqrt{\frac{-x + \sqrt{x^2 + 8}}{2}}$$

(onde as escolhas dos ramos das raízes foi baseado no facto de a condição inicial $y_0 = 1 > 0$). Dado que

$$-x + \sqrt{x^2 + 8} > 0 \qquad , \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

tem-se que o intervalo máximo de solução é $\mathbb{R}$.

5. a) Determine em que condições uma equação da forma

$$M(t, x) + N(t, x)x' = 0$$

admite um factor integrante que é uma função de t, isto é, da forma $\mu(t)$, para uma certa função real de variável real μ, e escreva uma equação diferencial ordinária satisfeita por μ.

b) Considere a equação diferencial ordinária

$$\frac{x}{t} - \operatorname{sen}(t) + x' = 0 \tag{3}$$

Mostre que a equação não é exacta. Use o resultado da alínea (a) para determinar a solução da equação (3) que satisfaz a condição inicial $x(\pi) = 1$. Indique o intervalo máximo de definição da solução obtida.

Resolução:

(a) A equação

$$M(t,x) + N(t,x)x' = 0$$

admite um factor integrante que é função de t, se conseguirmos encontrar uma função $\mu(t)$ tal que a equação

$$\mu(t)M(t,x) + \mu(t)N(t,x)x' = 0$$

é uma equação exacta. Para tal

$$\frac{\partial}{\partial x}\Big(\mu(t)M(t,x)\Big) = \frac{\partial}{\partial t}\Big(\mu(t)N(t,x)\Big)$$

Efectuando as derivadas

$$\mu(t)\frac{\partial M}{\partial x} = \mu(t)\frac{\partial N}{\partial t} + \mu'(t)N$$

o que é equivalente a

$$\mu'(t) = \left(\frac{\frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial N}{\partial t}}{N}\right)\mu(t) \tag{4}$$

Dado que por construção, μ é uma função de t, para que exista um factor integrante que só dependa de t, é necessário que a função

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial N}{\partial t}}{N}$$

não dependa de x. Se tal acontecer, a equação (4) é a equação diferencial verificada por $\mu(t)$.

(b) Considerando que

$$M(t,x) = \frac{x}{t} - \operatorname{sen}(t) \qquad , \qquad N(t,x) = 1$$

é óbvio que

$$\frac{\partial M}{\partial x} = \frac{1}{t} \neq \frac{\partial N}{\partial t} = 0$$

Para o nosso caso

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial N}{\partial t}}{N} = \frac{1}{t}$$

que obviamente não depende de x, pelo que, usando (4) o factor integrante verifica

$$\mu'(t) = \frac{1}{t}\mu(t) \;\Leftrightarrow\; \mu(t) = t$$

Por construção, a equação
$$x - t\,\mathrm{sen}\,t + tx' = 0$$
é exacta, pelo que existe $\Phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ verifcando
$$\nabla\Phi(t,x) = (x - t\,\mathrm{sen}\,t, t)$$
e $\Phi(t,x) = C$ define implicitamente a solução da equação diferencial. Para calcular Φ
$$\frac{\partial\Phi}{\partial t} = x - t\,\mathrm{sen}\,t \;\Leftrightarrow\; \Phi(t,x) = xt + t\cos t - \mathrm{sen}\,t + c(x)$$
e
$$\frac{\partial\Phi}{\partial x} = t \;\Leftrightarrow\; t + c'(x) = t \;\Leftrightarrow\; c(x) = c$$
e finalmente
$$\Phi(t,x) = xt + t\cos t - \mathrm{sen}\,t = C$$
define implicitamente a solução da equação diferencial. Dado que $x(\pi) = 1$, tem-se que $C = 0$. Por outro lado $N(\pi, 1) = 1 \neq 0$, o Teorema da Função Implícita garante a existência de solução única do PVI, definida por
$$xt + t\cos t - \mathrm{sen}\,t = 0 \tag{5}$$
para x numa vizinhança de $t_0 = \pi$. Resolvendo a equação em ordem a x obtem-se
$$x(t) = \frac{-t\cos t + \mathrm{sen}\,t}{t}$$
pelo que o intervalo máximo de solução será $]0, \infty[$.

6. Considere o problema de valor inicial:
$$\begin{cases} y^2\left(\dfrac{1}{x} + \log x\right) + 2y\log x\dfrac{dy}{dx} = 0 \\ y(e) = -1 \end{cases}$$
Obtenha explicitamente a solução deste problema e determine o seu intervalo máximo de definição.

Resolução: Trata-se de uma equação da forma
$$M(x,y) + N(x,y)y' = 0,$$
com $M(x,y) = y^2\left(\frac{1}{x} + \log x\right)$ e $N(x,y) = 2y\log x$. Temos que
$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{2y}{x} + 2y\log x \quad \text{e} \quad \frac{\partial N}{\partial x} = \frac{2y}{x},$$
pelo que a equação não é exacta. Multiplicando a equação por um factor integrante $\mu = \mu(x,y)$, obtém-se:
$$\mu(x,y)M(x,y) + \mu(x,y)N(x,y)y' = 0.$$

Para que esta equação seja exacta, μ deverá verificar

$$\frac{\partial}{\partial y}(\mu M) = \frac{\partial}{\partial x}(\mu N),$$

o que é equivalente a

$$y^2\left(\frac{1}{x}+\log x\right)\frac{\partial \mu}{\partial y}+\mu\left(\frac{2y}{x}+2y\log x\right) = 2y\log x\frac{\partial \mu}{\partial x}+\mu\frac{2y}{x},$$

ou, ainda:

$$y^2\left(\frac{1}{x}+\log x\right)\frac{\partial \mu}{\partial y} - 2y\log x\frac{\partial \mu}{\partial x} = -2y\log x\mu \tag{6}$$

Parece pois provável a existência de um factor integrante dependente apenas de x. De facto, admitindo que $\mu = \mu(x)$, então $\frac{\partial \mu}{\partial y} = 0$, $\frac{\partial \mu}{\partial y} = \mu'(x)$, pelo que a equação (6) reduz-se a:

$$\mu' = \mu.$$

Podemos então tomar $\mu(x) = e^x$. Desta forma, a equação:

$$e^x\left(\frac{1}{x}+\log x\right)y^2 + 2ye^x\log x\frac{dy}{dx} = 0$$

é exacta, e portanto existe $F(x,y)$ tal que esta mesma equação se pode escrever:

$$\frac{d}{dx}F(x,y(x)) = 0.$$

F é então o potencial do campo gradiente $\left(e^x\left(\frac{1}{x}+\log x\right)y^2, 2ye^x\log x\right)$. Assim sendo:

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 2ye^x\log x.$$

Integrando (em ordem a y), obtém-se:

$$F(x,y) = y^2e^x\log x + h(x). \tag{7}$$

Por outro lado, como

$$\frac{\partial F}{\partial x} = y^2e^x\left(\frac{1}{x}+\log x\right)+h'(x) = e^x\left(\frac{1}{x}+\log x\right)y^2,$$

temos $h'(x) = 0$, pelo que se pode tomar $h(x) = 0$ em (7). A solução geral da equação diferencial é então dada implicitamente por:

$$y^2e^x\log x = C, \quad \text{com } C \in \mathbb{R}.$$

Da condição inicial $y(e) = -1$, resulta que $C = e^e$.

Como $\log x \neq 0$ para x numa vizinhança de e, podemos dividir por $e^x\log x$ e obter (escolhendo o sinal de acordo com a condição inicial):

$$y(x) = -\sqrt{\frac{e^e}{e^x\log x}} = -\sqrt{\frac{e^{e-x}}{\log x}}. \tag{8}$$

Esta expressão define uma função continuamente diferenciável em $]1,+\infty[$ e é equivalente à forma implícita da solução, nesse intervalo. De acordo com (8), temos que a solução explode quando $x \to 1$, pelo que $]1,+\infty[$ é mesmo o intervalo máximo de solução.

7. Considere a equação diferencial ordinária

$$\left(4x^2y+3xy^2+2y^3\right)+\left(2x^3+3x^2y+4xy^2\right)\frac{dy}{dx}=0 \tag{9}$$

a) Mostre que (9) tem um factor integrante do tipo $\mu=\mu(xy)$.

b) Mostre que a solução de (9) com condição inicial $y(-1)=1$ é dada implicitamente pela expressão $x^4y^2+x^3y^3+x^2y^4=1$.

c) Determine o polinómio de Taylor de segunda ordem, no ponto -1, da solução dada implicitamente na alínea anterior.

Resolução:

(a) Admitindo que a equação (9) admite um factor integrante do tipo $\mu=\mu(xy)$, tem-se que

$$\mu(xy)\left(4x^2y+3xy^2+2y^3\right)+\mu(xy)\left(2x^3+3x^2y+4xy^2\right)\frac{dy}{dx}=0$$

é uma equação exacta, pelo que

$$\frac{\partial}{\partial y}\Big(\mu(xy)\left(4x^2y+3xy^2+2y^3\right)\Big)=\frac{\partial}{\partial x}\Big(\mu(xy)\left(2x^3+3x^2y+4xy^2\right)\Big)$$

ou seja

$$\begin{aligned}\mu'(xy)x\left(4x^2y+3xy^2+2y^3\right)+\mu(xy)(4x^2+6xy+6y^2) &=\\ \mu'(xy)y\left(2x^3+3x^2y+4xy^2\right)+\mu(xy)(6x^2+6xy+4y^2)&\end{aligned}$$

Fazendo $v=xy$, obtem-se então

$$\mu'(v)=\frac{1}{v}\mu(v)\ \Leftrightarrow\ \mu(v)=v\ \Leftrightarrow\ \mu(xy)=xy$$

Por construção a equação

$$xy\left(4x^2y+3xy^2+2y^3\right)+xy\left(2x^3+3x^2y+4xy^2\right)\frac{dy}{dx}=0$$

é exacta, pelo que existe $\Phi:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ tal que

$$\nabla\Phi(x,y)=(4x^3y^2+3x^2y^3+2xy^4,2x^4y+3x^3y^2+4x^2y^3)$$

e $\Phi(x,y)=C$ define implicitamente a solução da equação. Para calcular Φ,

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x}=4x^3y^2+3x^2y^3+2xy^4\ \Rightarrow\ \Phi(x,y)=x^4y^2+x^3y^3+x^2y^4+c(y)$$

e

$$\frac{\partial\Phi}{\partial y}=2x^4y+3x^3y^2+4x^2y^3\ \Rightarrow\ 2x^4y+3x^3y^2+4x^2y^3+c'(y)=2x^4y+3x^3y^2+4x^2y^3$$

o que implica $c(y)=c$. Tem-se então

$$\Phi(x,y)=x^4y^3+x^3y^3+x^2y^4=C$$

define implicitamente a solução da equação diferencial. Finalmente, visto $y(-1) = 1$ e $N(-1, 1) = -3 \neq 0$, o Teorema da Função Implícita garante a existência de solução única de (9) definida por

$$x^4y^2 + x^3y^3 + x^2y^4 - 1 = 0$$

para x numa vizinhança de $x_0 = -1$ como se queria mostrar.

(c) O polinómio de Taylor de segunda ordem pedido, será

$$P_2(x) = y(-1) + y'(-1)(x+1) + y''(-1)\frac{(x+1)^2}{2}$$

É dado que $y(-1) = 1$, e atendendo a que

$$y'(x) = \frac{4x^2y + 3xy^2 + 2y^3}{2x^3 + 3x^2y + 4xy^2}$$

para todo (x, y) em $\mathbb{R}^2$ que não anule $2x^3 + 3x^2y + 4xy^2$, tem-se em particular que

$$y'(-1) = \left.\frac{4x^2y + 3xy^2 + 2y^3}{2x^3 + 3x^2y + 4xy^2}\right|_{(x,y)=(-1,1)} = -1$$

Finalmente, derivando (10) em ordem a x

$$\begin{aligned} y''(x) \quad &= \quad \frac{(8xy + 4x^2y' + 3y^2 + 6xyy' + 6y^2y')(2x^3 + 3x^2y + 4xy^2)}{(2x^3 + 3x^2y + 4xy^2)^2} - \\ &\quad - \frac{(4x^2y + 3xy^2 + 2y^3)(6x^2 + 6xy + 3x^2y' + 4y^2 + 8xyy')}{(2x^3 + 3x^2y + 4xy^2)^2} \end{aligned}$$

Sabendo que se $x = -1$, $y = 1$ e $y' = -1$, tem-se então

$$y''(-1) = -6$$

e

$$P_2(x) = 1 - (x+1) - 6\frac{(x+1)^2}{2} = -2 - 7x - 3x^2$$