Análise Matemática IV
Problemas para as Aulas Práticas

11 de Maio de 2005

Semana 9

1. Seja

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Determine $e^{t\mathbf{A}}$ e resolva o problema de valor inicial $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$, $\mathbf{x}(1) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Resolução: Vamos calcular primeiro a solução geral da equação diferencial.

Os valores próprios de $\mathbf{A}$ são as soluções da equação

$$\det(\mathbf{A} - \lambda I) = 0 \ \Leftrightarrow \ \Big((5-\lambda)(3-\lambda)+1\Big)(4-\lambda) = -(\lambda-4)^3 = 0.$$

Assim, obtemos apenas o valor próprio $\lambda = 4$ com multiplicidade algébrica 3.

Começamos por calcular o(s) vector(es) próprio(s) associados, há que determinar os vectores $\mathbf{v} = (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tais que

$$(\mathbf{A} - 4I)\mathbf{v} = 0 \ \Leftrightarrow \ \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \ \Leftrightarrow \ a - b = 0$$

Tem-se então que os vectores próprios são:

$$\mathbf{v} = (a, b, c) = (a, a, c) = (a, a, 0) + (0, 0, c) = a(1, 1, 0) + c(0, 0, 1).$$

Assim, podemos escolher dois vectores própios linearmente independentes, como por exemplo:

$$\mathbf{v_1} = (1, 1, 0), \qquad \mathbf{v_2} = (0, 0, 1)$$

Isto fornece duas soluções independentes da equação diferencial:

$$\mathbf{x_1}(t) = e^{4t}(1, 1, 0), \qquad \mathbf{x_2}(t) = e^{4t}(0, 0, 1).$$

Precisamos de obter um terceira solução linearmente independente. Para isso, procuramos um vector $\mathbf{v} = (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tal que $(A - 4I)^2\mathbf{v} = 0$ e $(A - 4I)\mathbf{v} \neq 0$. Como

$$(\mathbf{A} - 4I)^2\mathbf{v} = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$(\mathbf{A} - 4I)\mathbf{v} \neq 0 \Leftrightarrow a \neq b,$$

podemos tomar qualquer vector (a, b, c) com $a \neq b$. Assim, podemos escolher, por exemplo, $\mathbf{v_3} = (1, 0, 0)$. Este vector fornece então a terceira solução independente da equação diferencial:

$$\mathbf{x_3}(t) = e^{4t}\left[(1, 0, 0) + t(A - 4I)(1, 0, 0)\right] = e^{4t}(1 + t, t, 0).$$

Concluímos que a solução geral da equação diferencial é:

$$\mathbf{x}(t) = C_1 e^{4t}(1, 1, 0) + C_2 e^{4t}(0, 0, 1) + C_3 e^{4t}(1 + t, t, 0).$$

A solução do PVI com $\mathbf{x}(1) = (1, 0, 0)$ obtém-se determinando as constantes que satisfazem:

$$(1, 0, 0) = C_1 e^4(1, 1, 0) + C_2 e^4(0, 0, 1) + C_3 e^4(2, 1, 0).$$

Resolvendo o sistema obtemos $C_1 = -e^{-4}$, $C_2 = 0$ e $C_3 = e^{-4}$. Logo a solução procurada é:

$$\mathbf{x}(t) = e^{4(t-1)}(t, t - 1, 0).$$

Por outro lado, a exponencial de At é dada por $e^{At} = X(t)X(0)^{-1}$ onde $X(t)$ é a matriz cujas colunas são soluções independentes da equação diferencial (i.e, uma matriz fundamental de soluções). Assim:

$$\begin{aligned} e^{At} &= \begin{bmatrix} e^{4t} & 0 & e^{4t}(1+t) \\ e^{4t} & 0 & e^{4t}t \\ 0 & e^{4t} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} e^{4t} & 0 & e^{4t}(1+t) \\ e^{4t} & 0 & e^{4t}t \\ 0 & e^{4t} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} = e^{4t} \begin{bmatrix} t+1 & -t & 0 \\ t & 1-t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

2. Seja

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Resolva o problema de valor inicial $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$, $\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Resolução:

Visto $\mathbf{A}$ ser uma matriz triangular, os seus valores próprios são os elementos da sua diagonal principal, ou seja

$$\det(\mathbf{A} - \lambda I) = 0 \Leftrightarrow \lambda = 2 \text{ ou } \lambda = 0 \text{ ou } \lambda = 1$$

Para calcular o vector próprio associado ao valor próprio $\lambda = 2$, há que determinar $\mathbf{v} = (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$ tal que

$$(\mathbf{A} - 2I)\mathbf{v} = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 0 & -2 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow b = c = 0$$

Tem-se então que

$$\mathbf{v} = (a, b, c) = (a, 0, 0) = a(1, 0, 0)$$

donde podemos escolher

$$\mathbf{v_1} = (1, 0, 0)$$

Este vector própio dá origem à solução:

$$\mathbf{x_1}(t) = e^{2t}(1, 0, 0).$$

Observe que esta solução satisfaz a condição inicial $\mathbf{x_1}(0) = (1, 0, 0)$, logo esta já é a solução procurada, e não vale a pena calcular mais valores próprios.

3. Seja

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Resolva o problema de valor inicial $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$, $\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Resolução:

Os valores próprios de $\mathbf{A}$ são as soluções da equação

$$\det(\mathbf{A} - \lambda I) = 0 \Leftrightarrow (2 - \lambda)^2(3 - \lambda) = 0.$$

Assim, obtemos o valor próprio $\lambda = 2$ com multiplicidade algébrica 2, e o valor próprio $\lambda = 3$ com multiplicidade algébrica 3. O valor próprio 2 dá pois origem a duas soluções independentes da equação diferencial enquanto que o valor próprio 3 dá origem a 1 solução.

Começamos por determinar os vectores próprios para $\lambda = 2$:

$$(\mathbf{A} - 2I)\mathbf{v} = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow a = c \text{ e } b = 0$$

Tem-se então que

$$\mathbf{v} = (a, 0, a) = a(1, 0, 1)$$

donde podemos escolher apenas um vector próprio independente, por exemplo:

$$\mathbf{v_1} = (1, 0, 1).$$

A solução associada será:

$$\mathbf{x_1}(t) = e^{2t}(1, 0, 1).$$

Para obter outra solução independente, procuramos um vector $\mathbf{v} = (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tal que $(A - 2I)^2\mathbf{v} = 0$ e $(A - 2I)\mathbf{v} \neq 0$. Como:

$$(\mathbf{A} - 2I)^2\mathbf{v} = 0 \ \Leftrightarrow \ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \ \Leftrightarrow \ c = a + b,$$

$$(\mathbf{A} - 2I)(a, b, a + b) \neq 0 \ \Leftrightarrow \ b \neq 0.$$

podemos tomar, por exemplo:

$$\mathbf{v_2} = (-1, 1, 0).$$

Este vector dá então origem à solução:

$$\mathbf{x_2}(t) = e^{2t}\left[(-1, 1, 0) + t(A - 2I)(-1, 1, 0)\right] = e^{2t}(-1 + t, 1, t).$$

Passando agora ao valor próprio $\lambda = 3$, calculamos o seus vectores própios:

$$(\mathbf{A} - 3I)\mathbf{v} = 0 \ \Leftrightarrow \ \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \ \Leftrightarrow \ a = b = 0$$

Obtém-se então:

$$\mathbf{v} = (0, 0, c) = c(0, 0, 1)$$

donde podemos escolher um vector próprio independente, por exemplo:

$$\mathbf{v_3} = (0, 0, 1)$$

Este dá origem à solução:

$$\mathbf{x_3}(t) = e^{3t}(0, 0, 1).$$

Assim, a solução geral da equação é:

$$\mathbf{x}(t) = C_1e^{2t}(1, 0, 1) + C_2e^{2t}(-1 + t, 1, t) + C_3e^{3t}(0, 0, 1).$$

Como queremos a solução que satisfaz a condição inicial $\mathbf{x}(0) = (1, 1, 1)$, determinamos os valores das constantes tais que:

$$(1, 1, 1) = C_1(1, 0, 1) + C_2(-1, 1, 0) + C_3(0, 0, 1).$$

Obtemos $C_1 = 2$, $C_2 = 1$ e $C_3 = -1$. Logo a solução procurada é:

$$\mathbf{x}(t) = e^{2t}(1 + t, 1, 2 + t) + e^{3t}(0, 0, -1).$$

4. Determine a solução geral do seguinte sistema de equações diferenciais:

$$\begin{cases} x' = 14x - 10y + 1 \\ y' = 10x - 2y + 2 \end{cases}$$

Sugestão: Determine primeiro uma solução particular constante.

Resolução:

Escrevendo o sistema na forma matricial

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} 14 & -10 \\ 10 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \equiv \mathbf{AX} + \mathbf{C}(t) \tag{1}$$

Dado que a equação é linear, uma sua solução será da forma

$$\mathbf{X} = \mathbf{X_h} + \mathbf{X_p}$$

em que $\mathbf{X_h}$ é a solução geral do problema homogéneo associado $\mathbf{X}' = \mathbf{AX}$, e $\mathbf{X_p}$ é uma solução particular da equação $\mathbf{X}' = \mathbf{AX} + \mathbf{C}$. Seguindo a sugestão, vamos procurar uma solução particular constante, ou seja, vamos procurar $\mathbf{X_p} = (c_1, c_2)$ que verifique a equação (1), isto é

$$\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} 14 & -10 \\ 10 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 14c_1 - 10c_2 + 1 = 0 \\ 10c_1 - 2c_2 + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow (c_1, c_2) = (-\frac{1}{4}, -\frac{1}{4})$$

pelo que $\mathbf{X_p} = (-\frac{1}{4}, -\frac{1}{4})$.

Falta então calcular a solução geral da equação homogénea $\mathbf{X_h}$. Os valores próprios de $\mathbf{A}$ são as soluções da equação

$$\det[\mathbf{A} - \lambda I] = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - 12\lambda + 72 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 6 \pm 6i$$

Donde temos dois valores próprios complexos conjugados com multiplicidade algébrica 1. Cada um dá origem a uma solução complexa da equação diferencial homogénea. Tomando as partes reais e as partes imaginárias de um deles obtemos duas soluções reais, independentes.

Para calcular o vector próprio associado ao valor próprio $\lambda = 6 + 6i$, há que determinar $\mathbf{v} = (a, b) \neq (0, 0)$ tal que

$$(\mathbf{A} - (6 + 6i)I)\mathbf{v} = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 8 - 6i & -10 \\ 10 & -8 - 6i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow 5b = (4 - 3i)a$$

Tem-se então que

$$\mathbf{v} = (a, b) = (5a, (4 - 3i)a) = a(5, 4 - 3i)$$

donde podemos escolher, por exemplo,

$$\mathbf{v} = (5, 4 - 3i)$$

Este vector próprio dá origem à solução complexa:

$$\mathbf{x}(t) = e^{(6+6i)t}(5, 4 - 3i).$$

A parte real e a parte imaginária dá origem a duas soluções reais independentes da equação:

$$\mathbf{x_1}(t) = e^{6t}(5\cos(6t), 4\cos(6t) + 3\,\mathrm{sen}(6t))$$
$$\mathbf{x_2}(t) = e^{6t}(5\,\mathrm{sen}(6t), 4\,\mathrm{sen}(6t) - 3\cos(6t))$$

A solução geral da equação homogénea é então:

$$\mathbf{X_h}(t) = C_1\mathbf{x_1}(t) + C_2\mathbf{x_2}(t),$$

e a solução geral da equação original é pois:

$$\mathbf{X}(t) = \mathbf{X_h} + \mathbf{X_p} = \begin{bmatrix} e^{6t}(5C_1\cos(6t) + 5C_2\,\mathrm{sen}(6t)) - \frac{1}{4} \\ e^{6t}(4C_1\cos(6t) + 3C_1\,\mathrm{sen}(6t) + 4C_2\,\mathrm{sen}(6t) - 3C_2\cos(6t)) - \frac{1}{4} \end{bmatrix}.$$

5. Considere a seguinte matriz:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(a) Calcule $e^{\mathbf{A}t}$.

Resolução:

$$e^{\mathbf{A}t} = \begin{bmatrix} e^t & te^t & 0 \\ 0 & e^t & 0 \\ 0 & 0 & e^t \end{bmatrix}$$

(b) Determine a solução do problema de valor inicial

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{y}} = \mathbf{Ay} + \mathbf{h}(\mathbf{t}) \\ \mathbf{y}(1) = (1,1,1)^T \end{cases}$$

onde $\mathbf{h}(\mathbf{t}) = (0, 2e^t, e^t)^T$.

Resolução:

A solução geral da equação homogénea é dada por $\dot{\mathbf{y}} - \mathbf{Ay} = 0$

$$\mathbf{y}(t) = e^{\mathbf{A}t}\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}.$$

Para determinar uma solução particular da equação basta determinar soluções particulares das equações

$$\dot{y}_2 - y_2 = 2e^t$$
$$\dot{y}_3 - y_3 = e^t.$$

Segue-se que

$$y_2(t) = Ate^t \quad \text{e} \quad y_3(t) = Bte^t.$$

Para determinar A e B tem-se

$$\dot{y}_2 - y_2 = 2e^t \quad \Rightarrow \quad Ae^t + Ate^t - Ate^t = 2e^t \quad \Rightarrow \quad A = 2$$

e

$$\dot{y}_3 - y_3 = e^t \quad \Rightarrow \quad Be^t + Bte^t - Bte^t = e^t \quad \Rightarrow \quad B = 1$$

Logo uma solução particular é

$$\mathbf{y}_P(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 2te^t \\ te^t \end{bmatrix}.$$

Aplicando a condição inicial, obtém-se

$$\mathbf{y}(t) = e^{\mathbf{A}(t-1)} \begin{bmatrix} 1 \\ 1-2e \\ 1-e \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 2te^t \\ te^t \end{bmatrix}.$$

Nota: O problema tambem pode ser resolvido usando a fórmula da variação das constantes.

6. Considere o seguinte problema de valor inicial

$$\begin{cases} \mathbf{y}' = A\mathbf{y} + \mathbf{b}(t) \\ \\ \mathbf{y}(0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T \end{cases}$$

onde

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{b}(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

(i) Determine a solução geral da equação homogénea.

(ii) Sendo $\mathbf{y}(t) = [y_1(t)\ y_2(t)\ y_3(t)\ y_4(t)]^T$ a solução do problema não homogéneo, determine $y_2(3)$.

Resolução:

(i) Visto a matriz $\mathbf{A}$ ser da forma

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A_1} & 0 \\ 0 & \mathbf{A_2} \end{bmatrix} \quad \text{sendo} \quad \mathbf{A_1} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} \text{ e } \mathbf{A_2} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

temos que

$$e^{\mathbf{A}t} = \begin{bmatrix} e^{\mathbf{A_1}t} & 0 \\ 0 & e^{\mathbf{A_2}t} \end{bmatrix}$$

o que facilita bastante os cálculos.

Começemos por calcular $e^{\mathbf{A_1}t}$. Observando que:

$$\mathbf{A_1} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$$

e as duas matrizes comutam, temos que:

$$\begin{aligned} e^{\mathbf{A_1}t} &= \exp \begin{bmatrix} -2t & 0 \\ 0 & -2t \end{bmatrix} \exp \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 3t & 0 \end{bmatrix} \\ &= e^{-2t} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3t & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Vamos agora calcular $e^{\mathbf{A_2}t}$. Os valores próprios de $\mathbf{A_2}$ são $1+2i$ e $1-2i$ associados (respectivamente) aos vectores próprios $\mathbf{v_1}=(1,i)$ e $\mathbf{v_2}=(1,-i)$. Sendo assim a matrix é diagonalizável:

$$\mathbf{A_2}=\mathbf{SDS}^{-1}=\begin{bmatrix}1 & 1\\ i & -i\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1+2i & 0\\ 0 & 1-2i\end{bmatrix}\frac{1}{2i}\begin{bmatrix}i & 1\\ i & -1\end{bmatrix}$$

e consequentemente

$$e^{\mathbf{A_2}t}=\mathbf{S}\mathbf{e}^{\mathbf{D}\mathbf{t}}\mathbf{S}^{-1}=\frac{e^t}{2i}\begin{bmatrix}1 & 1\\ i & -i\end{bmatrix}\begin{bmatrix}e^{2it} & 0\\ 0 & e^{-2it}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}i & 1\\ i & -1\end{bmatrix}=e^t\begin{bmatrix}\cos(2t) & \operatorname{sen}(2t)\\ -\operatorname{sen}(2t) & \cos(2t)\end{bmatrix}$$

Finalmente

$$e^{\mathbf{A}t}=\begin{bmatrix}e^{\mathbf{A_1}t} & 0\\ 0 & e^{\mathbf{A_2}t}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}e^{-2t} & 0 & 0 & 0\\ 3te^{-2t} & e^{-2t} & 0 & 0\\ 0 & 0 & e^t\cos(2t) & e^t\operatorname{sen}(2t)\\ 0 & 0 & -e^t\operatorname{sen}(2t) & e^t\cos(2t)\end{bmatrix}$$

e a solução geral do sistema homogéneo é dada por

$$\mathbf{y}(t)=e^{\mathbf{A}t}\mathbf{C}=\begin{bmatrix}e^{\mathbf{A_1}t} & 0\\ 0 & e^{\mathbf{A_2}t}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}e^{-2t} & 0 & 0 & 0\\ 3te^{-2t} & e^{-2t} & 0 & 0\\ 0 & 0 & e^t\cos(2t) & e^t\operatorname{sen}(2t)\\ 0 & 0 & -e^t\operatorname{sen}(2t) & e^t\cos(2t)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}c_1\\ c_2\\ c_3\\ c_4\end{bmatrix}$$

(ii) Pela fórmula da variação das constantes, a solução do problema de valor inicial dado será

$$\begin{aligned}\mathbf{y}(t) &= e^{\mathbf{A}t}\begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\end{bmatrix}+e^{\mathbf{A}t}\int_0^t e^{-\mathbf{A}s}\mathbf{b}(s)\,ds\\ &= \begin{bmatrix}e^{-2t} & 0 & 0 & 0\\ 3te^{-2t} & e^{-2t} & 0 & 0\\ 0 & 0 & e^t\cos(2t) & e^t\operatorname{sen}(2t)\\ 0 & 0 & -e^t\operatorname{sen}(2t) & e^t\cos(2t)\end{bmatrix}\int_0^t\begin{bmatrix}0\\ 2e^{2s}\\ 0\\ 0\end{bmatrix}ds\\ &= \begin{bmatrix}0\\ 1-e^{-2t}\\ 0\\ 0\end{bmatrix}\end{aligned}$$

pelo que

$$y_2(3)=1-e^{-6}$$

7. (i) Determine a solução do sistema linear

$$\begin{cases}x'=x-y\\ y'=2x-y\end{cases}$$

que satisfaz a condição inicial $x(0)=y(0)+1=1$.

(ii) Considerando agora o sistema

$$\begin{cases} x' = x - y \\ y' = 2x - y \\ z' = y - (\operatorname{sen} t)z \end{cases}$$

utilize a alínea anterior para determinar a solução que verifica a condição inicial $x(0) = y(0) + 1 = z(0) = 1$.

Resolução:

(i) Escrevendo o sistema na forma matricial

$$\mathbf{x}' = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{x} \equiv \mathbf{A}\mathbf{x}$$

Os valores próprios de $\mathbf{A}$ são i e $-i$ associados (respectivamente) aos vectores próprios $\mathbf{v_1} = (1, 1-i)$ e $\mathbf{v_2} = (1, 1+i)$. Sendo assim $\mathbf{A}$ é diagonalizável, logo:

$$\mathbf{A} = \mathbf{SDS}^{-1} = \frac{1}{2i} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1-i & 1+i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1+i & -1 \\ -1+i & 1 \end{bmatrix}$$

e consequentemente

$$\begin{aligned} e^{\mathbf{A}t} &= \mathbf{S}e^{\mathbf{D}t}\mathbf{S}^{-1} \\ &= \frac{1}{2i} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1-i & 1+i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{it} & 0 \\ 0 & e^{-it} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1+i & -1 \\ -1+i & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \operatorname{sen} t + \cos t & -\operatorname{sen} t \\ 2\operatorname{sen} t & -\operatorname{sen} t + \cos t \end{bmatrix} \end{aligned}$$

pelo que

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = e^{\mathbf{A}t} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \operatorname{sen} t + \cos t \\ 2\operatorname{sen} t \end{bmatrix}$$

(ii) Dado que nas duas primeiras equações não há dependência em z podemos concluir de imediato por (i) que

$$x(t) = \operatorname{sen} t + \cos t \qquad \text{e} \qquad y(t) = 2\operatorname{sen} t$$

Falta então determinar z, ou seja resolver o PVI

$$z' = 2\operatorname{sen} t - (\operatorname{sen} t)z \quad , \quad z(0) = 1$$

Trata-se de uma equação linear, de factor integrante

$$\mu(t) = e^{\int \operatorname{sen} t\, dt} = e^{-\cos t}$$

Então, a equação é equivalente a

$$\frac{d}{dt}\left(e^{-\cos t} z\right) = 2\operatorname{sen} t e^{-\cos t} \Leftrightarrow e^{-\cos t} z = 2e^{-\cos t} + c \Leftrightarrow z(t) = 2 + ce^{\cos t}$$

Dado que $z(0) = 1$, conclui-se

$$z(t) = 2 - e^{\cos t - 1}$$