Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

Análise Matemática IV

2º Semestre 2004/2005

1º Teste

Cursos: LEAN, LEC, LEEC, LEIC, LEMat, LEM, LEGM

23 de Abril de 2005

Duração do Teste: 1h30m

Justifique cuidadosamente todas as respostas.

(2,5 val.) **1.** Seja $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ a função dada por:

$$u(x,y) = e^x(x\cos y - y\,\text{sen}\, y),$$

(a) Mostre que u é harmónica e determine uma função inteira f com parte real u.

(b) Para a função f que calculou em (i), determine $f'(0)$.

(c) Para essa mesma função, calcule:

$$\oint_{|z|=1} \frac{f(z)}{z^2}\, dz.$$

(2,5 val.) **2.** Considere a função $f : \mathbb{C} \setminus \{-1, 1\} \to \mathbb{C}$ definida por

$$f(z) = \frac{z}{z^2 - 1}$$

(a) Determine o desenvolvimento de f em série de Laurent válido na região $0 < |z-1| < 2$.

(b) Utilize a alínea anterior para determinar

$$\oint_\gamma f(z)\, dz \quad , \quad \gamma = \{z \in \mathbb{C} \,:\, |z-1| = \frac{1}{2005}\}$$

onde a curva γ é percorrida uma vez no sentido directo.

(c) Justifique que f admite um desenvolvimento em série de Taylor em torno de $z_0 = i/3$. **Sem** determinar a série, indique o seu raio de convergência.

(2 val.) **3.** Determine

$$\oint_\gamma \Big(\frac{e^z - 1}{e^{2z} - 1} + (z-2)e^{1/z} \Big)\, dz$$

em que $\gamma = \{z \in \mathbb{C} : |z - i| + |z + i| = 3\}$ é percorrida uma vez no sentido directo.

(2 val.) **4.** Recorrendo ao Teorema dos Resíduos, mostre que

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{\sqrt{2} - \cos\theta} = 2\pi.$$

(1 val.) **5.** Se f é uma função analítica no anel $0 < |z - z_0| < R$, com um polo de ordem k em z_0, mostre que a função $\frac{f'}{f}$ possui um polo de 1ª ordem em z_0 e calcule o resíduo $\text{Res}(\frac{f'}{f}, z_0)$.