Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

Análise Matemática IV

2º Semestre 2004/2005

1º Teste

Cursos: LEAN, LEC, LEEC, LEIC, LEMat, LEM, LEGM

23 de Abril de 2005

Resolução do Teste

(2,5 val.) **1.** Seja $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ a função dada por:

$$u(x, y) = e^x(x \cos y - y \operatorname{sen} y),$$

(a) Mostre que u é harmónica e determine uma função inteira f com parte real u.

(b) Para a função f que calculou em (i), determine $f'(0)$.

(c) Para essa mesma função, calcule:

$$\oint_{|z|=1} \frac{f(z)}{z^2}\, dz.$$

Solução:

(a) Calculando as derivadas parciais, obtemos:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = e^x(x \cos y - y \operatorname{sen} y + \cos y), \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -e^x(x \operatorname{sen} y + y \cos y + \operatorname{sen} y),$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = e^x(x \cos y - y \operatorname{sen} y + 2\cos y), \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -e^x(x \cos y - y \operatorname{sen} y + 2\cos y).$$

Logo:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,$$

donde u é uma função harmónica.

Se $f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$ é uma função analítica com parte real u, então u e v satisfazem as equações de Cauchy-Riemann:

$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} = e^x(x \operatorname{sen} y + y \cos y + \operatorname{sen} y), \\ \\ \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} = e^x(x \cos y - y \operatorname{sen} y + \cos y). \end{cases}$$

Primitivando ambos os lados destas igualdades, obtemos:

$$\begin{cases} v(x, y) = e^x(x \operatorname{sen} y + y \cos y) + h(y), \\ \\ v(x, y) = e^x(x \operatorname{sen} y + y \cos y) + g(x). \end{cases}$$

Comparando estas expressões, vemos que $h(y) = g(x) = C$ é uma constante (real). Logo a função procurada é:

$$f(x+iy) = e^x(x \cos y - y \operatorname{sen} y) + ie^x(x \operatorname{sen} y + y \cos y) + iC,$$

onde podemos escolher $C \in \mathbb{R}$ arbitrário.

Nota: Embora não sendo necessário para resolver o problema, pode-se observar que a expressão de f em termos de $z = x + iy$ é:

$$f(z) = ze^z + iC.$$

(b) Recordemos que se $f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$ é analítica, então:

$$f'(x+iy) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial y}.$$

Em particular:

$$f'(0) = \frac{\partial u}{\partial x}(0,0) - i\frac{\partial u}{\partial y}(0,0) = 1 - i0 = 1.$$

Nota: Poderia também observar que, sendo $f(z) = ze^z + iC$, temos $f'(z) = e^z + ze^z$. Assim, $f'(0) = e^0 = 1$.

(c) Pelo fórmula integral de Cauchy para a derivada:

$$\oint_{|z|=1} \frac{f(z)}{z^2}\,dz = 2\pi i f'(0) = 2\pi i.$$

(2,5 val.) **2.** Considere a função $f : \mathbb{C} \setminus \{-1, 1\} \to \mathbb{C}$ definida por

$$f(z) = \frac{z}{z^2 - 1}$$

(a) Determine o desenvolvimento de f em série de Laurent válido na região $0 < |z-1| < 2$.

(b) Utilize a alínea anterior para determinar

$$\oint_\gamma f(z)\, dz \quad , \quad \gamma = \{z \in \mathbb{C} : |z-1| = \frac{1}{2005}\}$$

onde a curva γ é percorrida uma vez no sentido directo.

(c) Justifique que f admite um desenvolvimento em série de Taylor em torno de $z_0 = i/3$. **Sem** determinar a série, indique o seu raio de convergência.

Solução:

(a) Observe que:

$$f(z) = \frac{z}{z^2-1} = \frac{1/2}{z-1} + \frac{1/2}{z+1}.$$

Assim, basta determinar a série de Laurent do segundo factor:

$$\begin{aligned} \frac{1/2}{z+1} &= \frac{1/2}{2+z-1} \\ &= \frac{1/2}{2(1+\frac{z-1}{2})} \\ &= \frac{1}{2^2}\sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k\left(\frac{z-1}{2}\right)^k, \end{aligned}$$

onde na última igualdade utilizámos o facto que a série geométrica converge para $\left|\frac{z-1}{2}\right| < 1$, ou seja, para $|z-1| < 2$.

Assim, concluímos que a série de Laurent de f na região $0 < |z-1| < 2$ é:

$$f(z) = \frac{1/2}{z-1} + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2^{k+2}}(z-1)^k.$$

(b) Como a curva γ é uma curva simples, fechada, contida na região $0 < |z-1| < 2$, onde é válida a expansão de f que determinámos em (a), concluímos que:

$$\oint_\gamma f(z)\, dz = \oint_\gamma \frac{1/2}{z-1}\, dz = \frac{1}{2}2\pi i = \pi i.$$

(c) A função f é o quociente de duas funções analíticas, em que o denominador se anula em $z = \pm 1$. Logo f é uma função analítica no aberto $\mathbb{C} \setminus \{-1, 1\}$ e, portanto, possuí um desenvolvimento em série de Taylor em torno de qualquer ponto deste aberto. Assim, f admite um desenvolvimento em série de Taylor em torno de $z_0 = i/3$. Essa série converge no maior disco centrado em $z_0 = i/3$ e contido em $\mathbb{C} \setminus \{-1, 1\}$. Como

$$|i/3 - 1| = |i/3 - (-1)| = \sqrt{\frac{1}{9} + 1} = \frac{\sqrt{10}}{3},$$

concluímos que o raio de convergência é $\sqrt{10}/3$.

(2 val.) **3.** Determine

$$\oint_\gamma \Big(\frac{e^z-1}{e^{2z}-1}+(z-2)e^{1/z}\Big)\,dz$$

em que $\gamma=\{z\in\mathbb{C}:|z-i|+|z+i|=3\}$ é percorrida uma vez no sentido directo.

Solução: Oberve que a função em questão é analítica excepto em $z=0$ e nos pontos:

$$e^{2z}-1=0 \quad\Leftrightarrow\quad z=k\pi i\ (k\in\mathbb{Z}),$$

onde possui singularidades isoladas. Destes pontos, apenas a origem está no interior da elipse $|z-i|+|z+i|=3$, pois

$$|k\pi i-i|+|k\pi i+i|=|k\pi-1|+|k\pi+1|>3,\ \text{se } k\neq 0.$$

Assim, temos de estudar o comportamento da nossa função na origem.

Para o primeiro factor, observe que:

$$\begin{aligned}\lim_{z\to 0}\frac{e^z-1}{e^{2z}-1}&=\lim_{z\to 0}\frac{e^z-1}{(e^z-1)(e^z+1)}\\&=\lim_{z\to 0}\frac{1}{e^z+1}=\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Logo $\frac{e^z-1}{e^{2z}-1}$ possui uma singularidade removível na origem. Assim:

$$\oint_\gamma \frac{e^z-1}{e^{2z}-1}\,dz=0.$$

Por outro lado, para o segundo factor, observe que se $z\neq 0$, temos:

$$e^{1/z}=1+\frac{1}{1!z}+\frac{1}{2!z^2}+\frac{1}{3!z^3}+\cdots$$

logo

$$\begin{aligned}(z-2)e^{1/z}&=z\big(1+\frac{1}{1!z}+\frac{1}{2!z^2}+\frac{1}{3!z^3}+\cdots\big)-2\big(1+\frac{1}{1!z}+\frac{1}{2!z^2}+\frac{1}{3!z^3}+\cdots\big)\\&=z+\big(\frac{1}{1!}-2\big)+\big(\frac{1}{2!}-\frac{2}{1!}\big)\frac{1}{z}+\big(\frac{1}{3!}-\frac{2}{2!}\big)\frac{1}{z^2}+\cdots\\&=z-1-\frac{3/2}{z}-\frac{5/6}{z^2}+\cdots\end{aligned}$$

Assim, temos que:

$$\oint_\gamma (z-2)e^{1/z}\,dz=-\frac{3}{2}\oint_\gamma \frac{1}{z}\,dz=-3\pi i.$$

Portanto, o valor do integral pedido é

$$\oint_\gamma \Big(\frac{e^z-1}{e^{2z}-1}+(z-2)e^{1/z}\Big)\,dz=-3\pi i.$$

(2 val.) **4.** Recorrendo ao Teorema dos Resíduos, mostre que

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{\sqrt{2}-\cos\theta} = 2\pi.$$

Solução: Podemos transformar o integral (real) num integral de linha no plano complexo:

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{\sqrt{2}-\cos\theta} &= \int_0^{2\pi} \frac{1}{\sqrt{2}-\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}} \frac{ie^{i\theta}\,d\theta}{ie^{i\theta}} \\ &= \oint_{|z|=1} \frac{1}{\sqrt{2}-\frac{z+1/z}{2}} \frac{dz}{iz} \\ &= -\frac{2}{i}\oint_{|z|=1} \frac{dz}{z^2-2\sqrt{2}z+1}\end{aligned}$$

Recorrendo à fórmula resolvente, verificamos que:

$$z^2-2\sqrt{2}z+1=0 \quad \Leftrightarrow \quad z=\sqrt{2}\pm 1.$$

Como $\sqrt{2}+1$ está no exterior do círculo unitário e $\sqrt{2}-1$ está no seu interior, o Teorema dos Resíduos mostra que:

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{\sqrt{2}-\cos\theta} = -4\pi \mathrm{Res}(\frac{1}{z^2-2\sqrt{2}z+1}, \sqrt{2}-1).$$

Finalmente, para calcular o resíduo, notamos que:

$$\begin{aligned}\lim_{z\to\sqrt{2}-1}(z-\sqrt{2}+1)\frac{1}{z^2-2\sqrt{2}z+1} &= \lim_{z\to\sqrt{2}-1}\frac{z-\sqrt{2}+1}{(z-\sqrt{2}-1)(z-\sqrt{2}+1)} \\ &= \lim_{z\to\sqrt{2}-1}\frac{1}{z-\sqrt{2}-1} = -\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Como este limite existe e é não-nulo, concluímos que $z_0=\sqrt{2}-1$ é um polo de 1ª ordem e o resíduo é o valor do limite:

$$\mathrm{Res}(\frac{1}{z^2-2\sqrt{2}z+1}, \sqrt{2}-1) = -\frac{1}{2}.$$

Assim:

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{\sqrt{2}-\cos\theta} = 2\pi.$$

(1 val.) **5.** Se f é uma função analítica no anel $0 < |z - z_0| < R$, com um polo de ordem k em z_0, mostre que a função $\frac{f'}{f}$ possui um polo de 1ª ordem em z_0 e calcule o resíduo Res($\frac{f'}{f}$,z_0).

Solução: No anel $0 < |z - z_0| < R$ a função f admite a expansão em série de Laurent:

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{b_k}{(z-z_0)^k} + \frac{b_{k-1}}{(z-z_0)^{k-1}} + \cdots \\ &= \frac{1}{(z-z_0)^k}\left[b_k + b_{k-1}(z-z_0) + \cdots\right] \end{aligned}$$

Esta série converge uniformemente em qualquer anel $\epsilon \leq |z - z_0| \leq r$, com $0 < \epsilon < r < R$. Assim, podemos derivar a série termo a termo, concluindo que no mesmo anel a derivada $f'(z)$ é representada pela série:

$$\begin{aligned} f'(z) &= -\frac{kb_k}{(z-z_0)^{k+1}} - \frac{(k-1)b_{k-1}}{(z-z_0)^k} - \cdots \\ &= \frac{1}{(z-z_0)^{k+1}}\left[-kb_k - (k-1)b_{k-1}(z-z_0) - \cdots\right] \end{aligned}$$

Queremos testar se z_0 é um polo de 1ª ordem de $\frac{f'}{f}$, logo calculamos o limite:

$$\lim_{z\to z_0}(z-z_0)\frac{f'(z)}{f(z)} = \lim_{z\to z_0}\frac{-kb_k - (k-1)b_{k-1}(z-z_0) - \cdots}{b_k + b_{k-1}(z-z_0) + \cdots} = -k.$$

Como o limite existe e é não-nulo, concluímos que z_0 é um polo de 1ª ordem. O seu resíduo é o valor do limite:

$$\text{Res}(\frac{f'(z)}{f(z)}, z_0) = -k.$$