Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

Análise Matemática IV

2º Semestre 2004/2005

2º Teste

Cursos: LEC, LEEC, LEIC e LEAN

9 de Junho de 2005, 19h

Duração do Teste: 1h30m

Justifique cuidadosamente todas as respostas.

(2 val.) **1.** Resolva o seguinte problema de valor inicial

$$x + y\,\text{sen}\,x - \cos x\,\frac{dy}{dx} = 0, \quad y(1) = 0,$$

indicando o intervalo máximo de existência de solução.

(2 val.) **2.** Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} \sqrt{2}-1 & 1 & 0 \\ 0 & \sqrt{2}-1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Calcule a matriz e^{At} e resolva o PVI

$$X' = AX, \quad X(1) = (1, 0, \sqrt{2}).$$

(2 val.) **3.** Resolva o seguinte problema de valor inicial

$$\frac{d^4y}{dx^4} + \frac{d^2y}{dx^2} = 0, \quad y(0) = y'(0) = y''(0) = 0, y'''(0) = -1.$$

(3 val.) **4.** Considere o seguinte problema de valores na fronteira

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, & \text{para} \quad (x,y) \in]0,1[\times]0,1[, \\ \frac{\partial u}{\partial y}(x,0) = \frac{\partial u}{\partial y}(x,1) = 0, & \text{para} \quad x \in [0,1], \\ u(0,y) = 0, \quad u(1,y) = f(y), & \text{para} \quad y \in [0,1], \end{cases} \tag{1}$$

em que

$$f(y) = \begin{cases} -1 & \text{se} \quad 0 \leq y \leq 1/2, \\ 1 & \text{se} \quad 1/2 < y \leq 1. \end{cases}$$

(a) Determine a série de cosenos da função f no intervalo $[0,1]$ e indique para que valores converge a série.

(b) Resolva o problema (1).

(1 val.) **5.** Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, uma função continuamente diferenciável, verificando $|f(t,y) - y^2| \leq 1$, $\forall (t,y) \in \mathbb{R}^2$, e considere o PVI

$$y' = f(t,y), \quad y(0) = 1.$$

Mostre que a solução do PVI está definida em $[0, \pi/4[$.