Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

Análise Matemática IV

$2^{\underline{o}}$ Semestre 2004/2005

2º Teste

Cursos: LEAN, LEC, LEEC, LEIC, LEMat, LEM, LEGM

9 de Junho de 2005, 19h

Resolução do Teste

(2 val.) **1.** Resolva o seguinte problema de valor inicial

$$x + y \operatorname{sen} x - \cos x \frac{dy}{dx} = 0, \quad y(1) = 0,$$

indicando o intervalo máximo de existência de solução.

Solução: A equação é da forma

$$M(x,y) + N(x,y)\frac{dy}{dx} = 0$$

em que $M(x,y) = x + y \operatorname{sen} x$, $N(x,y) = -\cos x$. Dado que ambas as funções são de classe C^1 em $\mathbb{R}^2$ (são polinomiais), e

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \operatorname{sen} x = \frac{\partial N}{\partial x}$$

concluimos que se trata de uma equação exacta, pelo que existe uma função $\Phi(t,x) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, tal que

$$\nabla \Phi = (M, N) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \frac{\partial \Phi}{\partial x} = x + y \operatorname{sen} x, \\ \\ \frac{\partial \Phi}{\partial y} = -\cos x. \end{cases}$$

Integrando este sistema, obtemos, por exemplo, a solução

$$\Phi(x,y) = \frac{x^2}{2} - y \cos x,$$

pelo que as soluções da equação diferencial são dadas por:

$$\frac{x^2}{2} - y \cos x = C \quad \Rightarrow \quad y(x) = \frac{x^2/2 - C}{\cos x}.$$

Como estamos interessados na solução que satisfaz a condição inicial $y(1) = 0$, temos que:

$$0 = \frac{1/2 - C}{\cos 1} \quad \Rightarrow \quad C = \frac{1}{2},$$

portanto, a solução procurada é:

$$y(x) = \frac{x^2 - 1}{2 \cos x}.$$

Esta solução está definida para $\cos x \neq 0$, i.e., $x \neq \pi/2 + n\pi$ $(n \in \mathbb{Z})$. Como $1 \in]-\pi/2, +\pi/2[$ e:

$$\lim_{x \to -\frac{\pi}{2}^+} \frac{x^2-1}{2\cos x} = +\infty, \qquad \lim_{x \to +\frac{\pi}{2}^-} \frac{x^2-1}{2\cos x} = +\infty,$$

concluimos que o intervalo máximo de existência de solução é $]-\pi/2, +\pi/2[$.

(2,5 val.) **2.** Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} \sqrt{2}-1 & 1 & 0 \\ 0 & \sqrt{2}-1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Calcule a matriz e^{At} e resolva o PVI

$$X' = AX, \quad X(1) = (1, 0, \sqrt{2}).$$

Solução: Observe que a matriz dada já está na forma canónica de Jordan (é constiuída por dois blocos de Jordan, um bloco 2×2 correspondente a um valor próprio $\lambda = \sqrt{2} - 1$, e um bloco 1×1 correspondente a um valor próprio $\lambda = 2$). Sendo assim, a sua exponencial é dada por:

$$e^{At} = \exp\left(t \begin{bmatrix} \sqrt{2}-1 & 1 & 0 \\ 0 & \sqrt{2}-1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} e^{(\sqrt{2}-1)t} & te^{(\sqrt{2}-1)t} & 0 \\ 0 & e^{(\sqrt{2}-1)t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{2t} \end{bmatrix}.$$

Por sua vez, a solução do problema de valor inicial é dada por:

$$\begin{aligned} X(t) &= e^{A(t-1)}X(1) \\ &= \begin{bmatrix} e^{(\sqrt{2}-1)(t-1)} & (t-1)e^{(\sqrt{2}-1)(t-1)} & 0 \\ 0 & e^{(\sqrt{2}-1)(t-1)} & 0 \\ 0 & 0 & e^{2(t-1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \sqrt{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{(\sqrt{2}-1)(t-1)} \\ 0 \\ \sqrt{2}e^{2(t-1)} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

(2 val.) **3.** Resolva o seguinte problema de valor inicial

$$\frac{d^4y}{dx^4} + \frac{d^2y}{dx^2} = 0, \quad y(0) = y'(0) = y''(0) = 0, y'''(0) = -1.$$

Solução: Trata-se de uma equação linear homogénea de ordem 4. A equação característica associada é:

$$r^4 + r^2 = r^2(r^2+1) = 0,$$

e tem uma raíz dupla real $r = 0$ e duas raízes simples complexas conjugadas $r = \pm i$. Assim, a solução geral da equação é dada por:

$$y(x) = C_1 + C_2 x + C_3 \cos x + C_4 \operatorname{sen} x.$$

Impondo as condições iniciais, obtemos os valores das coeficientes:

$$\begin{cases} y(0) = 0 \\ y'(0) = 0 \\ y''(0) = 0 \\ y'''(0) = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1 + C_3 = 0 \\ C_2 + C_4 = 0 \\ C_3 = 0 \\ -C_4 = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1 = 0 \\ C_2 = -1 \\ C_3 = 0 \\ C_4 = 1 \end{cases}$$

Assim, a solução procurada é $y(x) = -x + \operatorname{sen} x$.

(2,5 val.) **4.** Considere o seguinte problema de valores na fronteira

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, & \text{para} \quad (x,y) \in]0,1[\times]0,1[, \\ \\ \frac{\partial u}{\partial y}(x,0) = \frac{\partial u}{\partial y}(x,1) = 0, & \text{para} \quad x \in [0,1], \\ \\ u(0,y) = 0, \quad u(1,y) = f(y), & \text{para} \quad y \in [0,1], \end{cases} \tag{1}$$

em que

$$f(y) = \begin{cases} -1 & \text{se} \quad 0 \le y \le 1/2, \\ \\ 1 & \text{se} \quad 1/2 < y \le 1. \end{cases}$$

(a) Determine a série de cosenos da função f no intervalo $[0,1]$ e indique para que valores converge a série.

(b) Resolva o problema (1).

Solução: (a) Para obter a expansão de f numa série de cosenos, consideramos a *extensão par* de f ao intervalo $[-1,1]$, i.e., a função dada por:

$$\tilde{f}(y) = \begin{cases} f(y) & \text{se} \quad 0 \le y \le 1, \\ \\ f(-y) & \text{se} \quad -1 \le y < 0. \end{cases}$$

A série procurada é a série de Fourier da função $\tilde{f}$ no intervalo $[-1,1]$ que, por $\tilde{f}$ ser par, é uma série de cosenos:

$$S_f(y) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \cos(n\pi y).$$

Os coeficientes a_n são dados por:

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{1}\int_{-1}^{1} \tilde{f}(y)\,dy \\ &= 2\int_0^1 f(y)\,dy = 0. \\ a_n &= \frac{1}{1}\int_{-1}^{1} \tilde{f}(y)\cos(n\pi y)\;dy \qquad (n>0) \\ &= 2\int_0^1 f(y)\cos(n\pi y)\;dy \\ &= 2\left(-\int_0^{1/2} \cos(n\pi y)\;dy + \int_0^{1/2} \cos(n\pi y)\right) = -\frac{4}{n\pi}\text{sen}\left(\frac{n\pi}{2}\right). \end{aligned}$$

Como $\tilde{f}$ é contínua por troços, com derivada contínua por troços, a série converge para $\tilde{f}(y)$ nos pontos onde a função é contínua e para a média dos limites laterais, nos pontos de descontinuidade, ou seja:

$$S_f(y) = \begin{cases} -1 & \text{se} \quad 0 \le y < 1/2, \\ 0 & \text{se} \quad y = 1/2 \\ 1 & \text{se} \quad 1/2 < y \le 1 \end{cases}$$

(b) Recorremos ao método de separação de variáveis para procurar soluções da forma:

$$u(x,y) = X(x)Y(y).$$

Substituindo na equação, obtemos:

$$X''Y + XY'' = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{X''}{X}(x) = -\frac{Y''}{Y}(y) = k,$$

para um constante k. Recorrendo às condições fronteira, obtemos:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial y}(x,0) = X(x)Y'(0) = 0, \\ \\ \frac{\partial u}{\partial y}(x,1) = X(x)Y'(1) = 0. \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} Y'(0) = 0, \\ \\ Y'(1) = 0. \end{cases}$$

Assim, precisamos de resolver o problema de valores fronteira:

$$Y''(y) + kY(y) = 0, \quad Y'(0) = Y'(1) = 0 \quad (0 < y < 1).$$

Este problema só tem soluções não-triviais se $k = (n\pi)^2$, onde $n \in \mathbb{Z}$, e nesse caso as soluções são dadas por:

$$Y(y) = C\cos(n\pi y).$$

Consideremos agora a equação para a função $X(x)$. temos que:

$$u(0,y) = X(0)Y(y) = 0 \quad \Rightarrow \quad X(0) = 0.$$

Assim, $X(x)$ é solução da ODE:

$$X''(x) - (n\pi)^2 X(x) = 0, \quad X(0) = 0.$$

As soluções obtém-se imediatamente e são dadas por:

$$X(x) = B\,\mathrm{senh}\,(n\pi x).$$

Assim, as soluções do nosso problema são da forma:

$$u(x,y) = \sum_{n=0}^{+\infty} C_n \mathrm{senh}\,(n\pi x)\cos(n\pi y).$$

Os coeficientes C_n são determinados a partir da condição fronteira que ainda não utilizámos:

$$u(1,y) = \sum_{n=0}^{+\infty} C_n \mathrm{senh}\,(n\pi)\cos(n\pi y) = f(y), \quad (y \in [0,1]).$$

Assim, obtemos os C_n a partir dos coeficientes da expansão de f numa série de cosenos no intervalo $[0,1]$. Pelo resultado da alínea (a), obtemos:

$$C_n = -\frac{4}{n\pi\,\mathrm{senh}\,(n\pi)}\mathrm{sen}\left(\frac{n\pi}{2}\right).$$

(1 val.) **5.** Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, uma função continuamente diferenciável, verificando $|f(t,y) - y^2| \leq 1$, $\forall (t,y) \in \mathbb{R}^2$, e considere o PVI

$$y' = f(t,y), \quad y(0) = 1.$$

Mostre que a solução do PVI está definida em $[0, \pi/4[$.

Solução: Por hipótese, temos que:

$$-1 \leq f(t,y) - y^2 \leq 1 \quad \Leftrightarrow \quad -1 + y^2 \leq f(t,y) \leq 1 + y^2.$$

Assim, se $u(t)$ e $v(t)$ designam as soluções dos PVI:

$$\begin{cases} u' = -1 + u^2, \\ \\ u(0) = 1. \end{cases} \qquad \begin{cases} v' = 1 + v^2, \\ \\ v(0) = 1. \end{cases}$$

temos que:

$$u(t) \leq y(t) \leq v(t),$$

para todo o $t \geq 0$ onde $u(t)$ e $v(t)$ estejam definidas.

A solução do PVI para $v(t)$ obtém-se imediatamente notando que é uma equação separável:

$$v(t) = \text{tg}\,(t + \pi/4).$$

Esta solução está definida para

$$-\frac{\pi}{2} < t + \frac{\pi}{4} < \frac{\pi}{2} \quad \Leftrightarrow \quad -\frac{3\pi}{4} < t < \frac{\pi}{4}.$$

A equação para $u(t)$ também é separável, mas deve-se notar que não podemos dividir por $u^2 - 1$, pois a condição inicial $u(0) = 1$ implica que este factor se anula em $t = 0$. Na realidade, o PVI admite simplesmente a solução constante $u(t) = 1$.

Assim, a solução $y(t)$ do PVI original satisfaz

$$1 \leq y(t) \leq \text{tg}\,(t + \pi/4), \quad \forall t \in [0, \pi/4[,$$

donde está definida em $[0, \pi/4[$.