Dois exemplos de parametrização de curvas em $\mathbb{R}^3$

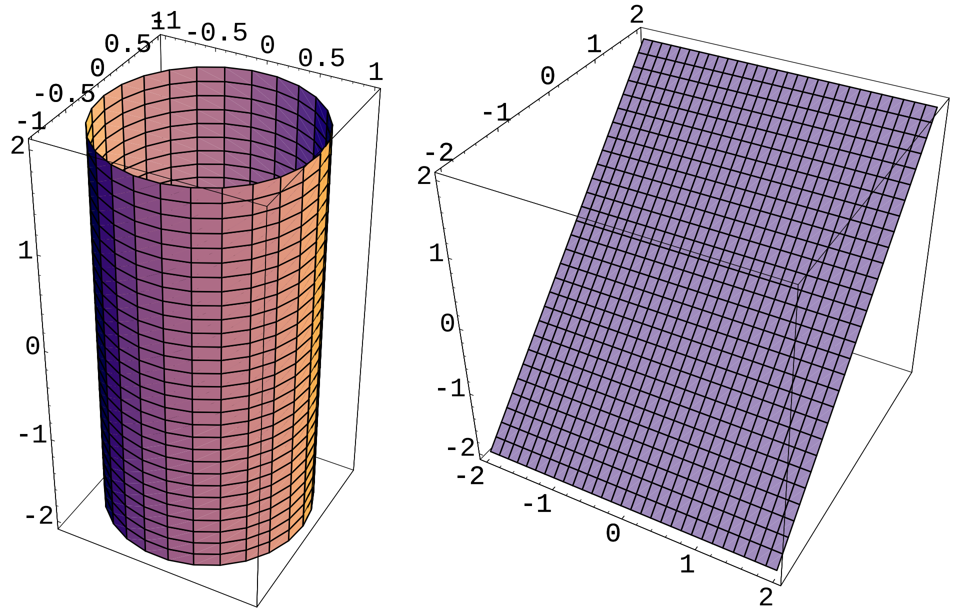

Figura 1: O cilindro $x^2 + y^2 = 1$ e o plano $y = z$.

Se intersectarmos o cilindro $x^2 + y^2 = 1$ com o plano $y = z$ (representados na figura 1) obtemos a elipse $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x^2 + y^2 = 1\,,\ y = z\}$ representada na figura 2.

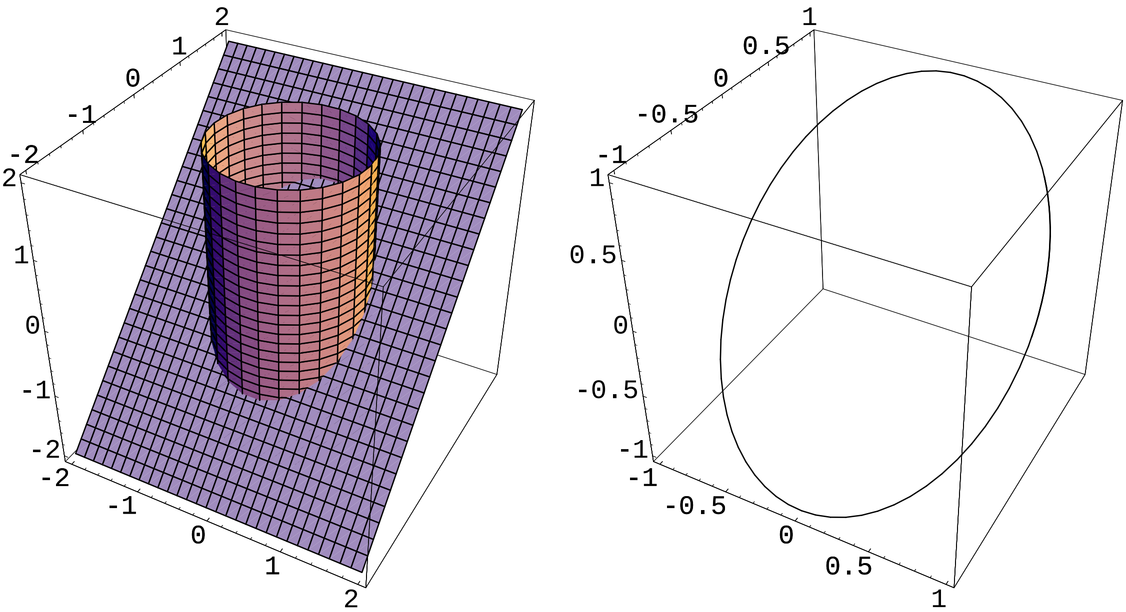

Figura 2: A intersecção do cilindro com o plano.

Uma vez que a projecção desta elipse no plano xy é a circunferência de raio 1 e centro $(0, 0)$, podemos parametrizar as coordenadas x e y por $x = \cos(t)$ e $y = \operatorname{sen}(t)$ com $t \in [0, 2\pi]$. Obtemos assim a seguinte parametrização para a elipse E:

$$g(t) = (\cos(t), \operatorname{sen}(t), \operatorname{sen}(t)) \quad \text{com} \quad t \in [0, 2\pi]\ .$$

Consideremos agora a superfície $S = \{(x, y, z) : z = x + y^2 + \text{sen}(xy)\}$ – ver figura 3. Note que S é o gráfico da função $f(x, y) = x + y^2 + \text{sen}(xy)$.

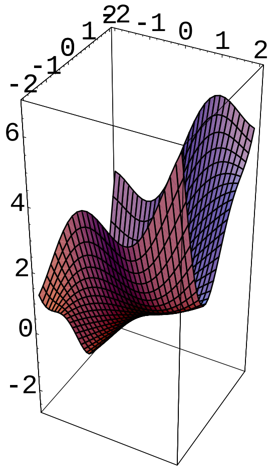

Figura 3: A superfície de equação $z = x + y^2 + \text{sen}(xy)$.

A intersecção de S com o cilindro de equação $x^2 + y^2 = 1$ é uma curva cuja projecção no plano xy é a circunferência de raio 1 e centro $(0, 0)$ – ver figura 4. Portanto, tal como no exemplo anterior, podemos parametrizar as coordenadas x e y por $x = \cos(t)$ e $y = \text{sen}(t)$, com $t \in [0, 2\pi]$. Para a coordenada z usamos a relação $z = f(x, y)$. Obtém-se a seguinte parametrização

$$g(t) = (\cos(t), \text{sen}(t), \cos(t) + \text{sen}^2(t) + \text{sen}(\cos(t)\,\text{sen}(t))) \ , \quad \text{com} \quad t \in [0, 2\pi] \ ,$$

para a curva $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1 \, , \, z = x + y^2 + \text{sen}(xy)\}$.

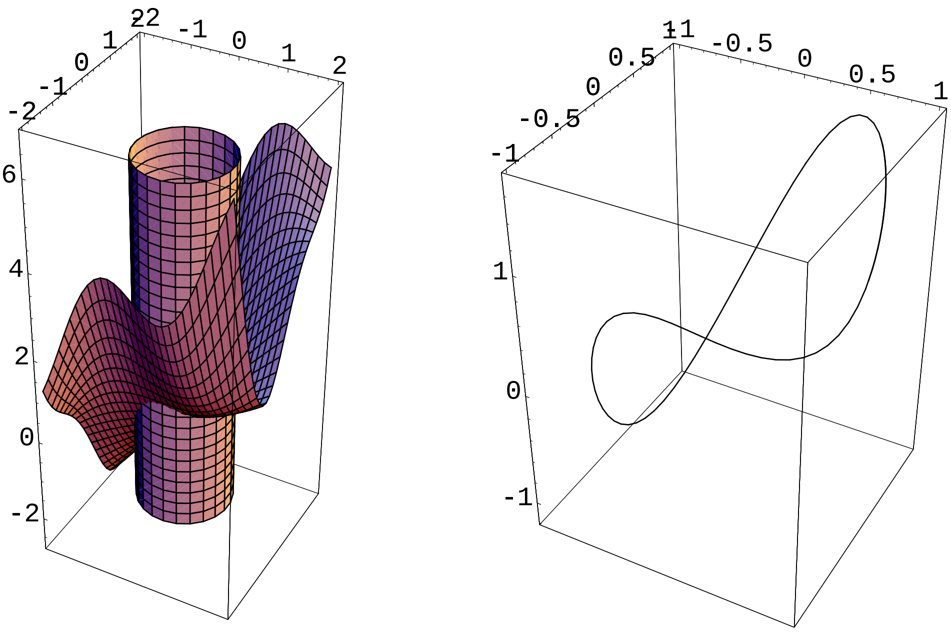

Figura 4: A intersecção da superfície S com o cilindro $x^2 + y^2 = 1$.