Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

ANÁLISE MATEMÁTICA III

TODOS OS CURSOS EXCEPTO LEIC, LCI, LEA, LEBM, LEFT E LMAC

TESTE 1 – 28 DE OUTUBRO DE 2006

apresente e justifique todos os cálculos

duração: hora e meia (11:00-12:30)

(1) Considere o sólido

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ 0 < x < 1\, ;\, x < y < 1\, ;\, 0 < z < \sqrt{2 - x^2 - y^2}\}\ .$$

(3.5 val.) (a) Calcule o integral $\displaystyle\iiint_S z$.

Resolução

O sólido S tem como base o triângulo no plano xOy com vértices $(0,0,0)$, $(1,1,0)$ e $(0,1,0)$, tem paredes verticais, e é limitado superiormente pela parte da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 2$ por cima deste triângulo (ver Figura 1).

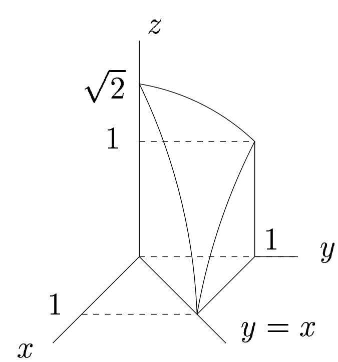
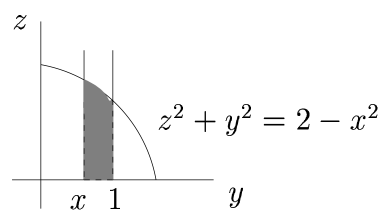


FIGURE 1

Usando o teorema de Fubini e escolhendo a ordem de integração natural em termos das desigualdades que definem S, obtém-se:

$$\begin{aligned}
\iiint_S z &= \int_0^1 \int_x^1 \int_0^{\sqrt{2-x^2-y^2}} z\, dz\, dy\, dx = \int_0^1 \int_x^1 \left[\frac{1}{2} z^2\right]_{z=0}^{z=\sqrt{2-x^2-y^2}} dy\, dx \\
&= \frac{1}{2} \int_0^1 \int_x^1 (2 - x^2 - y^2)\, dy\, dx = \frac{1}{2} \int_0^1 \left[2y - x^2 y - \frac{1}{3} y^3\right]_{y=x}^{y=1} dx = \\
&= \frac{1}{2} \int_0^1 \left[2(1-x) - x^2(1-x) - \frac{1}{3}(1 - x^3)\right] dx = \\
&= \frac{1}{2} \left[\frac{5}{3} x - x^2 - \frac{x^3}{3} + \frac{1}{3} x^4\right]_0^1 = \frac{1}{3},
\end{aligned}$$

como se deduz dos cortes verticais obtidos fixando $x \in [0,1]$ (ver Figura 2).



$0 < x < 1$

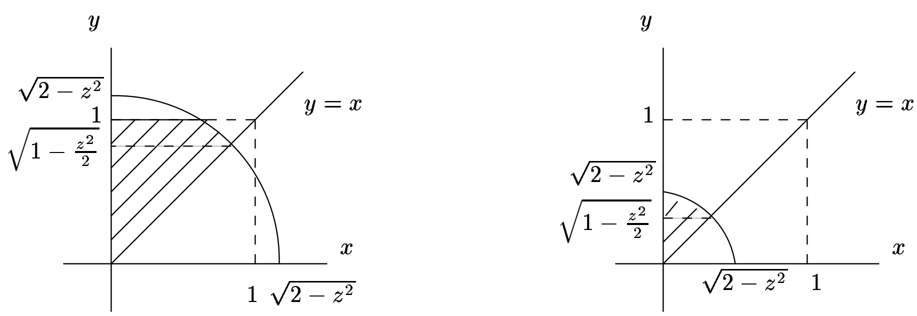
FIGURE 2

(3.5 val.) (b) Escreva uma expressão para o volume de S em termos de integrais iterados da forma

$$\int_{\cdots}^{\cdots} \left(\int_{\cdots}^{\cdots} \left(\int_{\cdots}^{\cdots} dx \right) dy \right) dz \ .$$

Resolução

Os cortes de S com planos $z = const$ são diferentes para $0 < z < 1$ e $1 < z < \sqrt{2}$:



$0 < z < 1$ $\qquad\qquad$ $1 < z < \sqrt{2}$

FIGURE 3

Da Figura 3 vemos que a expressão pretendida é:

$$\begin{aligned} \iiint_S 1 \;\; &= \;\; \int_0^1 \left[\int_0^{\sqrt{1-\frac{z^2}{2}}} \int_0^y \, dx\, dy + \int_{\sqrt{1-\frac{z^2}{2}}}^1 \int_0^{\sqrt{2-y^2-z^2}} \, dx\, dy \right] dz + \\ &\quad + \int_1^{\sqrt{2}} \left[\int_0^{\sqrt{1-\frac{z^2}{2}}} \int_0^y \, dx\, dy + \int_{\sqrt{1-\frac{z^2}{2}}}^{\sqrt{2-z^2}} \int_0^{\sqrt{2-y^2-z^2}} \, dx\, dy \right] dz. \end{aligned}$$

(2) Calcule o volume do sólido (3 val.)

$$B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : 1 + \frac{1}{2}\left(x^2 + y^2\right) < z < \frac{3}{2}\sqrt{x^2+y^2}, \ x > 0, \ y > 0\}.$$

Resolução

Em coordenadas cilindricas

$$g\ :\ \begin{cases} x &= \rho\cos(\theta) \\ y &= \rho\,\mathrm{sen}(\theta) \\ z &= z \end{cases}$$

as desigualdades que definem $g^{-1}(B)$ são

$$1+\frac{1}{2}\rho^2 < z < \frac{3}{2}\rho;\ \ 0<\theta<\frac{\pi}{2}$$

(as duas curvas no plano ρOz intersectam-se em $\rho = 1$ e $\rho = 2$). Fazendo um corte com θ constante obtemos a seguinte figura:

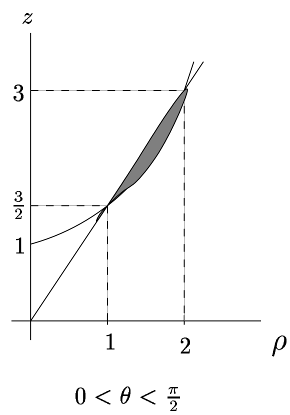


FIGURE 4

O volume é então:

$$\begin{aligned} Vol(B) = \iiint_B 1 &= \int_0^{\pi/2}\int_1^2\int_{1+\frac{1}{2}\rho^2}^{\frac{3}{2}\rho} \rho\,dz\,d\rho\,d\theta = \\ &= \frac{\pi}{2}\int_1^2 \rho\left(\frac{3}{2}\rho - 1 - \frac{1}{2}\rho^2\right)d\rho = \frac{\pi}{2}\left[\frac{\rho^3}{2}-\frac{\rho^2}{2}-\frac{\rho^4}{8}\right]_1^2 = \\ &= \frac{\pi}{16}. \end{aligned}$$

(3) Seja $\Gamma \subset \mathbb{R}^3$ a curva definida por

$$\Gamma = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 :\ z = 2-y,\ x^2+y^2+(z-2)^2 = 1\}.$$

(2 val.) Calcule a massa de Γ sabendo que a densidade de massa é dada por $\sigma = z$.

Resolução

A curva Γ é dada pela intersecção da esfera de centro $(0,0,2)$ e raio 1 com o plano $z = 2-y$ (ver Figura 5).

A projecção da curva Γ no plano xOy é a elipse $\widetilde{\Gamma}$ dada por

$$\widetilde{\Gamma}\ :\ x^2 + \frac{y^2}{\frac{1}{2}} = 1.$$

Uma representação paramétrica de $\widetilde{\Gamma}$ é então

$$\tilde{g}\ :\ \begin{cases} x &= \cos(t) \\ y &= \frac{1}{\sqrt{2}}\,\mathrm{sen}(t), \end{cases} \qquad 0\le t\le 2\pi$$

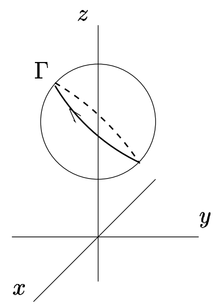


Figure 5

e portanto a representação paramétrica correspondente de Γ é

$$g \ : \ \begin{cases} x &= \cos(t) \\ y &= \frac{1}{\sqrt{2}}\,\text{sen}(t) \\ z &= 2 - \frac{1}{\sqrt{2}}\,\text{sen}(t) \end{cases} \qquad 0 \leq t \leq 2\pi \quad ,$$

com norma do vector velocidade dada por

$$||g'(t)|| = \sqrt{\text{sen}^2(t) + \frac{1}{2}\cos^2(t) + \frac{1}{2}\cos^2(t)} = 1.$$

Assim, a massa de γ é

$$\text{Massa}(\Gamma) = \int_\Gamma \sigma = \int_\Gamma z = \int_0^{2\pi} \left(2 - \frac{\text{sen}(t)}{\sqrt{2}}\right) \cdot 1 \cdot dt = 4\pi.$$

(4) Considere os campos vectoriais

$$\begin{aligned} \mathbf{F}(x,y,z) &= (\text{sen}(xz)z,\ y,\ \text{sen}(xz)x) \qquad \text{e} \\ \mathbf{G}(x,y,z) &= (-\frac{2y}{x^2+y^2},\ \frac{2x}{x^2+y^2},\ 0). \end{aligned}$$

a) Mostre que $\mathbf{F}$ é um campo fechado e indique, justificando, se $\mathbf{F}$ é um gradiente no seu domínio. Em caso afirmativo determine um potencial escalar. (2.5 val.)

Resolução

$\mathbf{F}$ é um campo vectorial de classe C^1 em $\mathbb{R}^3$. Por outro lado

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_2}{\partial x} &= 0 = \frac{\partial F_1}{\partial y} \\ \frac{\partial F_3}{\partial y} &= 0 = \frac{\partial F_2}{\partial z} \\ \frac{\partial F_3}{\partial x} &= \cos(xz)xz + \text{sen}(xz) = \frac{\partial F_1}{\partial z}, \end{aligned}$$

pelo que $\mathbf{F}$ é fechado. Uma vez que o campo $\mathbf{F}$ é fechado no domínio simplesmente conexo $\mathbb{R}^3$, é também gradiente nesse domínio. Temos

$$\nabla\varphi = \mathbf{F} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\partial\varphi}{\partial x} &= \text{sen}(xz)z \\ \frac{\partial\varphi}{\partial y} &= y \\ \frac{\partial\varphi}{\partial z} &= \text{sen}(xz)x \end{cases} \qquad (1)$$

Primitivando em ordem a x ambos os membros da primeira equação em (1) obtemos

(2)
$$\varphi = -\cos(xz) + c_1(y,z).$$

Substituindo (2) na segunda equação de (1), obtemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y}\left(-\cos(xz) + c_1(y,z)\right) &= y \Leftrightarrow \\ \frac{\partial c_1(y,z)}{\partial y} &= y \Leftrightarrow \\ c_1(y,z) &= \frac{1}{2}y^2 + c_2(z). \end{aligned}$$

(3)

Substituindo (3) em (2) e depois o resultado na terceira equação de (1), obtemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z}\left(-\cos(xz) + \frac{1}{2}y^2 + c_2(z)\right) &= \operatorname{sen}(xz)x \Leftrightarrow \\ \frac{dc_2(z)}{dz} &= 0 \Leftrightarrow \\ c_2(z) &= c. \end{aligned}$$

Escolhemos esta constante aditiva final igual a zero, $c = 0$. Substituindo em (3) e (2) obtemos um potencial escalar de $\mathbf{F}$,

(4)
$$\varphi = -\cos(xz) + \frac{1}{2}y^2.$$

(1.5 val.) b) Calcule $\int_\Gamma (\mathbf{F} + \mathbf{G}) \cdot d\mathbf{g}$ onde Γ é a curva definida por $z = 2 - y$ e $x^2 + y^2 + (z-2)^2 = 1$, percorrida no sentido horário quando observada do ponto $(0,0,10)$.

Resolução

Temos que

$$\int_\Gamma (\mathbf{F} + \mathbf{G}) \cdot d\mathbf{g} = \int_\Gamma \mathbf{F} \cdot d\mathbf{g} + \int_\Gamma \mathbf{G} \cdot d\mathbf{g}.$$

Como o campo $\mathbf{F}$ é gradiente e a curva Γ é fechada (ver Figura 5) temos

$$\int_\Gamma \mathbf{F} \cdot d\mathbf{g} = 0.$$

O campo $\mathbf{G}$ é um campo de "ralo da banheira" que sabemos ser fechado. O seu domínio é o seguinte conjunto não simplesmente conexo

$$D_G = \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,z), z \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}^3 \setminus Oz.$$

A curva Γ é homotópica, em D_G, à circunferência

$$C = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ z = 0; x^2 + y^2 = 1\right\}$$

percorrida no sentido horário quando observada do ponto $(0,0,10)$. Como $\mathbf{G}$ é fechado temos

$$\int_\Gamma \mathbf{G} \cdot d\mathbf{g} = \int_C \mathbf{G} \cdot d\mathbf{h}.$$

Uma representação paramétrica de C é

$$h \ : \ \begin{cases} x &= \cos(t) \\ y &= -\operatorname{sen}(t)\,, \quad 0 \leq t \leq 2\pi. \\ z &= 0 \end{cases}$$

Obtemos

$$\begin{aligned} \int_\Gamma \mathbf{G} \cdot d\mathbf{g} &= \int_C \mathbf{G} \cdot d\mathbf{h} = \\ &= \int_0^{2\pi} \left(\frac{2\operatorname{sen}(t)}{1}, \frac{2\cos(t)}{1}, 0 \right) \cdot (-\operatorname{sen}(t), -\cos(t), 0) \ dt = -4\pi. \end{aligned}$$

Temos então

$$\int_\Gamma (\mathbf{F} + \mathbf{G}) \cdot d\mathbf{g} = 0 - 4\pi = -4\pi.$$

c) Obtenha uma equação que descreva todos os pontos P tais que, se C é uma curva regular com pontos inicial e final $(0,0,1)$ e P, então $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{g} = 1$. (1 val.)

Resolução

Seja $P = (x,y,z)$. Como o campo $\mathbf{F}$ é gradiente com potencial $\varphi = -\cos(xz) + \frac{1}{2}y^2$, pelo teorema fundamental do cálculo para integrais de linha, temos

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{g} = \varphi(x,y,z) - \varphi(0,0,1) = -\cos(xz) + \frac{1}{2}y^2 + 1.$$

A equação pretendida é então

$$-\cos(xz) + \frac{1}{2}y^2 + 1 = 1 \ \Leftrightarrow \ -\cos(xz) + \frac{1}{2}y^2 = 0.$$

(5) Seja $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x^2 + y^2 \leq R^2\}$ e $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^2 tal que $f(x,y) = 0$ na fronteira de D. Mostre que $\iint_D \ f \Delta f \ \ \leq 0$, onde $\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$. (3 val.)

Resolução

Observemos que

$$\begin{aligned} f\Delta f &= f\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + f\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \\ &= \frac{\partial}{\partial x}\left(f\frac{\partial f}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(f\frac{\partial f}{\partial y} \right) - \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 - \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)^2 = \\ &= \frac{\partial}{\partial x}Q - \frac{\partial}{\partial y}P - \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 - \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)^2, \end{aligned}$$

onde $P = -f\frac{\partial f}{\partial y}$ e $Q = f\frac{\partial f}{\partial x}$. Temos então

$$\begin{aligned} \iint_D f\Delta f &= \iint_D \left(\frac{\partial}{\partial x}Q - \frac{\partial}{\partial y}P \right) - \iint_D \left[\left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)^2 \right] = \\ &= \oint_C (-f\frac{\partial f}{\partial y}, f\frac{\partial f}{\partial x}) \cdot d\mathbf{g} - \iint_D \left[\left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)^2 \right], \end{aligned} \tag{5}$$

onde C é a fronteira de D. Como $f(x,y)=0$ em C o integral de linha em (5) é igual a zero pelo que temos

$$\iint_D f\Delta f = -\iint_D \left[\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2\right] \leq 0.$$