Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

ANÁLISE MATEMÁTICA III
TODOS OS CURSOS EXCEPTO LCI, LEA, LEBM, LEFT, LEIC E LMAC
TESTE DE RECUPERAÇÃO 1
5 DE JANEIRO DE 2007

Apresente e justifique todos os cálculos

Duração: hora e meia (11:00-12:30)

(1) Considere a região D de $\mathbb{R}^3$ dada por

$$D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : y^2 \leq z \leq \frac{1}{3}(4-y^2),\ 0 < x < 1\}.$$

(3.5 val.) (a) Obtenha uma expressão para o volume de D da forma $\int_{\cdots}^{\cdots}\int_{\cdots}^{\cdots}\int_{\cdots}^{\cdots} dx\,dy\,dz$.

(3.5 val.) (b) Indique outra expressão para o volume de D, agora da forma $\int_{\cdots}^{\cdots}\int_{\cdots}^{\cdots}\int_{\cdots}^{\cdots} dz\,dx\,dy$, e calcule esse integral.

(4 val.) (2) Calcule a massa do sólido com densidade de massa $\sigma(x,y,z) = y$ definido por $B = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3\ :\ 1 < y^2 - x^2 - z^2 < 4,\ 1 < x^2 + z^2 < 9,\ y > 0,\ z > 0\right\}$.

(3) Considere os seguintes campos vectoriais de classe C^1 e fechados nos seus domínios

$$\mathbf{F}(x,y) = \left(-\frac{10(y-1)}{x^2+(y-1)^2}, \frac{10x}{x^2+(y-1)^2}\right) \quad \text{e} \quad \mathbf{H}(x,y) = \left(\frac{5(y-3)}{x^2+(y-3)^2}, -\frac{5x}{x^2+(y-3)^2}\right).$$

(3 val.) (a) Mostre que $\mathbf{F}$ e $\mathbf{H}$ não são gradientes nos seus domínios.

(3 val.) (b) Considere a curva $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$, percorrida no sentido horário, onde

$$\begin{aligned}\Gamma_1 &= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2\ :\ y = 2 - 2x^2,\ -1 < x < 1\right\}\\ \Gamma_2 &= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2\ :\ x^2 + (y-3)^2 = 10,\ y \geq 0\right\}.\end{aligned}$$

Calcule

$$\int_\Gamma (\mathbf{F} + \mathbf{H}) \cdot d\mathbf{r}\ .$$

(3 val.) (4) Sejam C_1 e C_2 duas curvas fechadas num aberto $U \subset R^2$, ambas com o mesmo ponto inicial (a,b), dadas por parametrizações de classe C^2, $p : [0,1] \to U$ e $q : [0,1] \to U$, respectivamente. Seja ainda $\mathbf{F}$ um campo vectorial de classe C^1 e fechado em U. Usando o teorema de Green, mostre que, se existe uma função $H : [0,1]^2 \to U$ de classe C^2 tal que

(i) $H(0,s) = H(1,s) = (a,b), \forall s \in [0,1]$ e

(ii) $H(t,0) = p(t)$ e $H(t,1) = q(t), \forall t \in [0,1]$,

então $\int_{C_1} \mathbf{F}.d\mathbf{r} = \int_{C_2} \mathbf{F}.d\mathbf{r}$.

Sugestão: Considere um campo $\mathbf{G}$ com componentes da forma:

$$\begin{aligned}G_1(t,s) &= F_1(x(t,s),y(t,s))\partial x/\partial t(t,s) + F_2(x(t,s),y(t,s))\partial y/\partial t(t,s)\\ G_2(t,s) &= F_1(x(t,s),y(t,s))\partial x/\partial s(t,s) + F_2(x(t,s),y(t,s))\partial y/\partial s(t,s)\end{aligned}$$