Análise Matemática III

2º semestre de 2006/2007

Exercício Suplementar

Escreva uma expressão para o volume do sólido:

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ 0 < x < y \ ; \ 0 < x^2 + y^2 < 1 \ ; \ 0 < z < 2 - x^2 - y^2\}$$

em termos de integrais triplos com a ordem de integração $dy\,dz\,dx$, e tente calcular esse volume.

Resolução (corrigida 4 de Abril)

Esboçamos o sólido S na figura 1, e os cortes de S ao longo de planos $x = \text{constante}$ na figura 2.

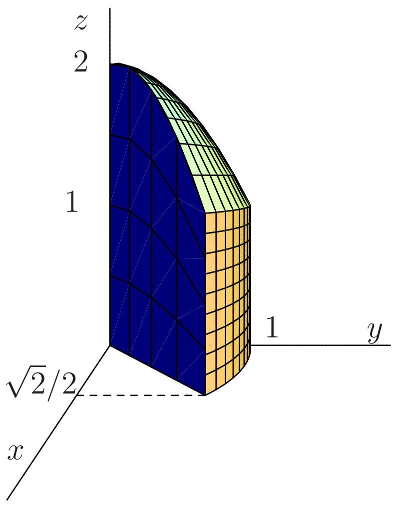

Figure 1: O sólido S

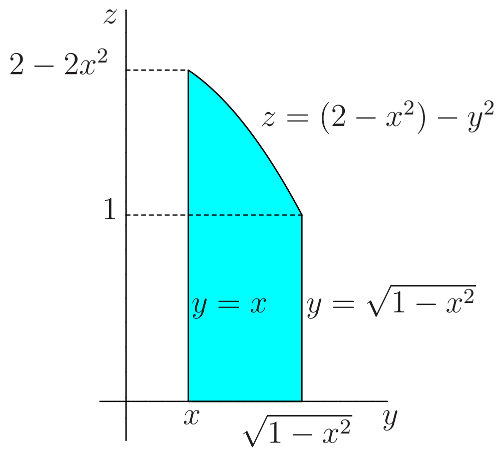

Figure 2: Cortes $x = \text{constante}$

Os cortes $z = \text{constante}$ do corte $x = \text{constante}$ são os intervalos dados por:

para $0 < z \leq 1$, o corte é o intervalo $x < y < \sqrt{1-x^2}$
para $1 < z < 2-2x^2$, o corte é o intervalo $x < y < \sqrt{2-x^2-z}$.

Assim uma expressão para o volume de S é dada por:

$$\int_0^{\sqrt{2}/2}\int_0^1\int_x^{\sqrt{1-x^2}} dy\,dz\,dx + \int_0^{\sqrt{2}/2}\int_1^{2-2x^2}\int_x^{\sqrt{2-x^2-z}} dy\,dz\,dx\,.$$

Podemos calcular o primeiro integral da seguinte maneira:

$$\begin{aligned}
\int_0^{\sqrt{2}/2}\int_0^1\int_x^{\sqrt{1-x^2}} dy\,dz\,dx &= \int_0^{\sqrt{2}/2}\int_0^1 \sqrt{1-x^2} - x\,dz\,dx \\
&= \int_0^{\sqrt{2}/2} \sqrt{1-x^2} - x\,dx \\
&= \int_0^{\sqrt{2}/2} \sqrt{1-x^2}\,dx - \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{\sqrt{2}/2} \\
&= \int_0^{\sqrt{2}/2} \sqrt{1-x^2}\,dx - \frac{1}{4}\,.
\end{aligned}$$

O primeiro termo nesta última expressão pode ser calculado com a substituição $x = \sin t$, $dx = \cos t\, dt$:

$$\begin{aligned}
\int_0^{\sqrt{2}/2} \sqrt{1-x^2}\, dx &= \int_0^{\pi/4} \cos^2 t\, dt \\
&= \int_0^{\pi/4} \frac{1+\cos 2t}{2}\, dt \\
&= \left[\frac{t}{2} + \frac{\sin 2t}{4}\right]_0^{\pi/4} = \frac{\pi}{8} + \frac{1}{4},
\end{aligned}$$

onde usámos a identidade trigonométrica

$$\begin{aligned}
\cos 2t &= \cos^2 t - \sin^2 t \\
&= 2\cos^2 t - 1 \\
&= 1 - 2\sin^2 t
\end{aligned}$$

donde vem

$$\cos^2 t = (1+\cos 2t)/2\,.$$

Podemos calcular o segundo integral da seguinte maneira:

$$\begin{aligned}
&\int_0^{\sqrt{2}/2} \int_1^{2-2x^2} \int_x^{\sqrt{2-x^2-z}} dy\, dz\, dx \\
&= \int_0^{\sqrt{2}/2} \int_0^{2-2x^2} \sqrt{2-x^2-z} - x\, dz\, dx \\
&= \int_0^{\sqrt{2}/2} \left[\frac{-2(2-x^2-z)^{3/2}}{3} - xz\right]_{z=1}^{z=2-2x^2} dx \\
&= \int_0^{\sqrt{2}/2} \frac{-2x^3}{3} + \frac{2(1-x^2)^{3/2}}{3} - x + 2x^3\, dx \\
&= \int_0^{\sqrt{2}/2} \frac{2(1-x^2)^{3/2}}{3}\, dx + \int_0^{\sqrt{2}/2} -x + \frac{4x^3}{3}\, dx\,.
\end{aligned}$$

O cálculo do segundo termo é facil:

$$\left[\frac{-x^2}{2} + \frac{x^4}{3}\right]_0^{\sqrt{2}/2} = -\frac{1}{4} + \frac{1}{3.4} = -\frac{1}{6}\,.$$

Calculamos o primeiro termo usando novamente a substituição $x = \sin t$ e a identidade trigonométrica acima (duas vezes):

$$\begin{aligned}
\frac{2}{3}\int_0^{\sqrt{2}/2} (1-x^2)^{3/2}\,dx &= \frac{2}{3}\int_0^{\pi/4} (\cos^3 t)\cos t\,dt \\
&= \frac{2}{3}\int_0^{\pi/4} \frac{(1+\cos 2t)^2}{4}\,dt \\
&= \frac{2}{3}\int_0^{\pi/4} \frac{1}{4} + \frac{\cos 2t}{2} + \frac{1+\cos 4t}{8}\,dt \\
&= \frac{2}{3}\left[\frac{t}{4} + \frac{\sin 2t}{4} + \frac{t}{8} + \frac{\sin 4t}{32}\right]_0^{\pi/4} \\
&= \frac{\pi}{24} + \frac{1}{6} + \frac{\pi}{48} + 0 = \frac{\pi}{16} + \frac{1}{6}.
\end{aligned}$$

Juntando os resultados, o volume é dado por:

$$\mathrm{vol}(S) = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{6} + \frac{\pi}{16} + \frac{1}{6} = \frac{3\pi}{16}\,.$$

Parabens, quem tenha tentado fazer os cálculos!