Resumos de CDI-II

1. Topologia e Continuidade de Funções em $\mathbb{R}^n$

1. A **bola aberta** de centro em $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ e raio $r > 0$ é o conjunto

$$B_r(\mathbf{a}) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| < r\}.$$

2. Seja $A \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto. Um ponto $\mathbf{a} \in A$ diz-se:
   (i) **interior** se existe $r > 0$ tal que $B_r(\mathbf{a}) \subset A$;
   (ii) **exterior** se existe $r > 0$ tal que $B_r(\mathbf{a}) \cap A = \varnothing$;
   (iii) **fronteiro** se não é interior nem exterior.

   O conjunto $\operatorname{int} A$ dos pontos interiores de A diz-se o **interior** de A. O conjunto $\operatorname{ext} A$ dos pontos exteriores de A diz-se o **exterior** de A. O conjunto ∂A dos pontos fronteiros de A diz-se a **fronteira** de A. O conjunto $\bar{A} = \operatorname{int} A \cup \partial A$ diz-se o **fecho** de A. O conjunto A diz-se **aberto** se $A = \operatorname{int} A$, e diz-se **fechado** se $A = \bar{A}$.
3. Uma **sucessão** em $\mathbb{R}^n$ é uma função $\mathbf{x} : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^n$. Escrevemos $\mathbf{x}_k = \mathbf{x}(k)$.
4. Dizemos que uma sucessão $\mathbf{x}_k$ **converge** para $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ (e escrevemos $\lim \mathbf{x}_k = \mathbf{a}$, ou $\mathbf{x}_k \to \mathbf{a}$) se

$$\begin{aligned} &\forall_{r>0}\exists_{N\in\mathbb{N}} : k > N \Rightarrow \mathbf{x}_k \in B_r(\mathbf{a}) \\ &\Leftrightarrow \forall_{r>0}\exists_{N\in\mathbb{N}} : k > N \Rightarrow \|\mathbf{x}_k - \mathbf{a}\| < r \\ &\Leftrightarrow \|\mathbf{x}_k - \mathbf{a}\| \to 0. \end{aligned}$$

5. Uma sucessão $\mathbf{x}_k = ((x_1)_k, \ldots, (x_n)_k)$ converge para um ponto $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_n)$ **sse** cada sucessão $(x_i)_k$ converge para a_i $(i = 1, \ldots, n)$.
6. **Propriedades dos limites de sucessões:** Se $\mathbf{x}_k, \mathbf{y}_k$ são sucessões convergentes em $\mathbb{R}^n$ e a_k é uma sucessão convergente em $\mathbb{R}$ então:
   (i) $\lim \mathbf{x}_k$ é único;
   (ii) $\lim(\mathbf{x}_k + \mathbf{y}_k) = \lim \mathbf{x}_k + \lim \mathbf{y}_k$;
   (iii) $\lim(a_k \mathbf{y}_k) = (\lim a_k)(\lim \mathbf{y}_k)$;
   (iv) $\lim \langle \mathbf{x}_k, \mathbf{y}_k \rangle = \langle \lim \mathbf{x}_k, \lim \mathbf{y}_k \rangle$.
7. Um conjunto $A \subset \mathbb{R}^n$ é fechado **sse** toda a sucessão convergente de termos em A tem limite em A.
8. Um conjunto $A \subset \mathbb{R}^n$ diz-se **limitado** se existe algum $r > 0$ tal que $A \subset B_r(\mathbf{0})$. Um conjunto $A \subset \mathbb{R}^n$ diz-se **compacto** se é limitado e fechado.
9. **Teorema de Bolzano-Weierstrass:** Um conjunto $A \subset \mathbb{R}^n$ é compacto **sse** toda a sucessão de termos em A admite uma subsucessão convergente para um ponto de A.

10. Uma função $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ diz-se um **campo escalar**. Uma função $\mathbf{F} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ diz-se um **campo vectorial**. Uma função $\mathbf{g} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ **contínua** diz-se um **caminho**.
11. O **gráfico** de uma função $\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ é o conjunto

$$\mathrm{Graf}(\mathbf{f}) = \{(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathbb{R}^{n+m} : \mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x})\} \subset \mathbb{R}^{n+m}.$$

O **conjunto de nível** da função $\mathbf{f}$ correspondente ao valor $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^m$ é o conjunto

$$\mathbf{f}^{-1}(\mathbf{c}) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{c}\} \subset \mathbb{R}^n.$$

12. Dizemos que $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ é o **limite** de uma função $\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ quando $\mathbf{x}$ tende para $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ (e escrevemos $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{b}$) se

$$\begin{aligned} &\forall_{r>0}\exists_{\varepsilon>0} : \mathbf{x} \in B_\varepsilon(\mathbf{a}) \Rightarrow \mathbf{f}(\mathbf{x}) \in B_r(\mathbf{b}) \\ &\Leftrightarrow \forall_{r>0}\exists_{\varepsilon>0} : \|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| < \varepsilon \Rightarrow \|\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{b}\| < r \\ &\Leftrightarrow \forall_{\text{sucessão } \mathbf{x}_k}\ \mathbf{x}_k \to \mathbf{a} \Rightarrow \mathbf{f}(\mathbf{x}_k) \to \mathbf{b}. \end{aligned}$$

13. **Propriedades dos limites de funções:** Se $\mathbf{f}, \mathbf{g} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ e $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ são funções com limite no ponto $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ então:
    (i) $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} \mathbf{f}(\mathbf{x})$ é único;
    (ii) $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} \mathbf{f}(\mathbf{x}) = (\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} f_1(\mathbf{x}), \ldots, \lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} f_m(\mathbf{x}))$;
    (iii) $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} (\mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{g}(\mathbf{x})) = \lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} \mathbf{g}(\mathbf{x})$;
    (iv) $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} (\varphi(\mathbf{x})\mathbf{f}(\mathbf{x})) = (\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} \varphi(\mathbf{x}))\,(\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} \mathbf{f}(\mathbf{x}))$;
    (v) $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} \langle \mathbf{f}(\mathbf{x}), \mathbf{g}(\mathbf{x})\rangle = \langle \lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} \mathbf{f}(\mathbf{x}), \lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} \mathbf{g}(\mathbf{x})\rangle$.
14. Diz-se que $\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ é **contínua** no ponto $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ se $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{f}(\mathbf{a})$. A função $\mathbf{f}$ diz-se **contínua** se é contínua em todos os pontos do seu domínio.
15. **Propriedades das funções contínuas:** Se $\mathbf{f}, \mathbf{g} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ e $\mathbf{h} : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^p$ são funções e $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ então:
    (i) $\mathbf{f} = (f_1, \ldots, f_m)$ é contínua em $\mathbf{a}$ **sse** $f_1, \ldots, f_m$ são contínuas em $\mathbf{a}$;
    (ii) Se $\mathbf{f}$ e $\mathbf{g}$ são contínuas em $\mathbf{a}$ então $\mathbf{f} + \mathbf{g}$ é contínua em $\mathbf{a}$;
    (iii) Se φ e $\mathbf{f}$ são contínuas em $\mathbf{a}$ então $\varphi\mathbf{f}$ é contínua em $\mathbf{a}$;
    (iv) Se $\mathbf{f}$ e $\mathbf{g}$ são contínuas em $\mathbf{a}$ então $\langle \mathbf{f}, \mathbf{g}\rangle$ é contínua em $\mathbf{a}$;
    (v) Se $\mathbf{f}$ é contínua em $\mathbf{a}$ e $\mathbf{h}$ é contínua em $\mathbf{f}(\mathbf{a})$ então $\mathbf{h} \circ \mathbf{f}$ é contínua em $\mathbf{a}$;
    (vi) Se $\varphi(x_1, \ldots, x_n) = x_i$ (com $i = 1, \ldots, n$) então φ é contínua.
16. **Teorema Weierstrass:** Se $A \subset \mathbb{R}^n$ é compacto e $f : A \to \mathbb{R}$ é contínua então f tem máximo e mínimo em A.

2. Cálculo Diferencial em $\mathbb{R}^n$

1. A **derivada** de $\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ **segundo o vector** $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ no ponto $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ é

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{v}}(\mathbf{a}) \equiv \partial_{\mathbf{v}}\mathbf{f}(\mathbf{a}) = \lim_{h\to 0} \frac{\mathbf{f}(\mathbf{a} + h\mathbf{v}) - \mathbf{f}(\mathbf{a})}{h}.$$

2. A i-ésima **derivada parcial** da função $\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ no ponto $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ é

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x_i}(\mathbf{a}) \equiv \partial_i\mathbf{f}(\mathbf{a}) = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{e}_i}(\mathbf{a}).$$

3. A função $\mathbf{f}:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ diz-se **diferenciável** em $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ se existe uma transformação linear $D\mathbf{f}(\mathbf{a}):\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ (representada por uma matriz $m \times n$) tal que

$$\lim_{\mathbf{h}\to\mathbf{0}} \frac{\mathbf{f}(\mathbf{a}+\mathbf{h}) - \mathbf{f}(\mathbf{a}) - D\mathbf{f}(\mathbf{a})\cdot\mathbf{h}}{\|\mathbf{h}\|} = \mathbf{0},$$

ou, equivalentemente,

$$\mathbf{f}(\mathbf{a}+\mathbf{h}) = \mathbf{f}(\mathbf{a}) + D\mathbf{f}(\mathbf{a})\cdot\mathbf{h} + \mathbf{o}(\|\mathbf{h}\|).$$

4. Se $\mathbf{f}:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ é diferenciável em $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ então $\mathbf{f}$ é contínua em $\mathbf{a}$.
5. Se $\mathbf{f}:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ é diferenciável em $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ então

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{v}}(\mathbf{a}) = D\mathbf{f}(\mathbf{a})\cdot\mathbf{v}.$$

Em particular, $D\mathbf{f}$ é representada na base canónica pela **matriz Jacobiana**

$$D\mathbf{f} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{bmatrix}.$$

6. A função $\mathbf{f}:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ diz-se de **classe** C^1 se todas as suas derivadas parciais $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$ $(i = 1,\dots,m; j = 1,\dots,n)$ são funções contínuas.
7. Se $\mathbf{f}:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ é de classe C^1então $\mathbf{f}$ é diferenciável em todos os pontos do seu domínio.
8. Se $\mathbf{f}:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ é diferenciável em $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ e $\mathbf{g}:\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^p$ é diferenciável em $\mathbf{f}(\mathbf{a}) \in \mathbb{R}^m$, então $\mathbf{g}\circ\mathbf{f}:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ é diferenciável em $\mathbf{a}$ e

$$D(\mathbf{g}\circ\mathbf{f})(\mathbf{a}) = D\mathbf{g}(\mathbf{f}(\mathbf{a}))D\mathbf{f}(\mathbf{a}).$$

Em coordenadas $(x_1,\dots,x_n)$ em $\mathbb{R}^n$ e $(y_1,\dots,y_m)$ em $\mathbb{R}^m$ tem-se

$$\frac{\partial g_i}{\partial x_j} = \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial g_i}{\partial y_k}\frac{\partial f_k}{\partial x_j}$$

(**regra da cadeia**).
9. Um vector $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ diz-se **tangente** a um conjunto $M \subset \mathbb{R}^n$ no ponto $\mathbf{a} \in M$ se existe um caminho diferenciável $\mathbf{g}:\mathbb{R} \to M$ tal que $\mathbf{g}(0) = \mathbf{a}$ e $\mathbf{g}'(0) = \mathbf{v}$. Um vector $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ diz-se **ortogonal** a M no ponto $\mathbf{a}$ se é ortogonal a todos os vectores tangentes a M no ponto $\mathbf{a}$.
10. Se $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é um campo escalar diferenciável o seu **gradiente** é o campo vectorial $\nabla f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ definido por

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1},\dots,\frac{\partial f}{\partial x_n}\right)$$

11. O gradiente de um campo escalar é ortogonal aos seus conjuntos de nível.

3. Fórmula de Taylor e Extremos

1. **Derivadas parciais de ordem superior:** Dada uma função $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ define-se

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right).$$

A função f diz-se de **classe** C^2 se todas as suas derivadas parciais de segunda ordem são funções contínuas.

2. **Lema de Schwarz:** Se $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é de classe C^2 então

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}.$$

3. **Fórmula de Taylor de segunda ordem:** Se $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é de classe C^2 então

$$f(\mathbf{a}+\mathbf{h}) = f(\mathbf{a}) + Df(\mathbf{a}) \cdot \mathbf{h} + \frac{1}{2}\mathbf{h}^t \cdot Hf(\mathbf{a}) \cdot \mathbf{h} + o(\|\mathbf{h}\|^2),$$

onde

$$Hf = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial {x_1}^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial {x_n}^2} \end{bmatrix}$$

é a **matriz Hessiana**. Pelo Lema de Schwarz, esta matriz é **simétrica**.

4. Diz-se que $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tem um **máximo local** em $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ se existe $r > 0$ tal que $f(\mathbf{a}) \geq f(\mathbf{x})$ para todo o $\mathbf{x} \in B_r(\mathbf{a})$. O máximo diz-se **global** se $f(\mathbf{a}) \geq f(\mathbf{x})$ para todo o $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. As definições de **mínimo local** e **mínimo global** são análogas.

5. Se o campo escalar diferenciável $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tem um extremo local em $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ então $\nabla f(\mathbf{a}) = 0$.

6. Seja $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ um campo escalar diferenciável. Os pontos $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ para os quais $\nabla f(\mathbf{a}) = 0$ dizem-se **pontos críticos** (ou **pontos de estacionaridade**) de f. Os pontos críticos que não são extremos locais chamam-se **pontos de sela**.

7. Seja $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ um campo escalar de classe C^2 e $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ um ponto crítico de f. Se $Hf(\mathbf{a})$ é:
   (i) **definida positiva** (todos os v.p. > 0) então $\mathbf{a}$ é um ponto de **mínimo local**;
   (ii) **definida negativa** (todos os v.p. < 0) então $\mathbf{a}$ é um ponto de **máximo local**;
   (iii) **indefinida** (existem v.p. > 0 e v.p. < 0) então $\mathbf{a}$ é um **ponto de sela**.

4. Cálculo Integral em $\mathbb{R}^n$

1. $I \subset \mathbb{R}^n$ é um **intervalo** se $I = I_1 \times \ldots \times I_n$, onde cada I_k é um intervalo de $\mathbb{R}$. I é limitado/aberto/fechado **sse** cada I_k é limitado/aberto/fechado. Se I é um intervalo compacto com $I_k = [a_k, b_k]$, o seu **volume** n**-dimensional** é

$$V_n(I) = (b_1 - a_1)(b_2 - a_2)\ldots(b_n - a_n).$$

Se I é um intervalo limitado, define-se $V_n(I) = V_n\left(\bar{I}\right)$. Uma **partição** do intervalo compacto $I \subset \mathbb{R}$ é um conjunto finito $P = P_1 \times \ldots \times P_n$, onde cada P_k é uma partição do intervalo $I_k = [a_k, b_k]$ (i.e., P_k é um subconjunto finito de I_k contendo a_k, b_k). Uma partição de I subdivide I num número finito de subintervalos J_α. Uma função $s : I \to \mathbb{R}$ diz-se uma **função em escada** se existe uma partição P de I tal que s é constante (igual a s_α) no interior de cada subintervalo J_α, sendo o seu **integral** o número real

$$\int_I s = \sum_\alpha s_\alpha V_n(J_\alpha).$$

2. Seja $I \subset \mathbb{R}^n$ um intervalo compacto e $f : I \to \mathbb{R}$ uma função **limitada**. O **integral superior** de f em I é o número real

$$\overline{\int_I} f = \inf \left\{ \int_I t : t \text{ é em escada e } t(\mathbf{x}) \geq f(\mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{x} \in I \right\}.$$

   O **integral inferior** de f em I é o número real

$$\underline{\int_I} f = \sup \left\{ \int_I s : s \text{ é em escada e } s(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{x} \in I \right\}.$$

   A função f diz-se **integrável à Riemann** em I se os seus integrais superior e inferior coincidem, e nesse caso define-se o seu **integral** como sendo

$$\int_I f = \underline{\int_I} f = \overline{\int_I} f.$$

   As seguintes notações são também utilizadas para o integral de f:

$$\int_I f = \int_I f dV_n = \int_I f(\mathbf{x}) dV_n(\mathbf{x}) = \int_I f\left(x_1, \ldots, x_n\right) dx_1 \ldots dx_n.$$

3. Se f e g são funções integráveis à Riemann no intervalo compacto $I \subset \mathbb{R}^n$ e $\alpha \in \mathbb{R}$ então $f + g$ e αf são também integráveis à Riemann em I e
   (i) $\displaystyle\int_I (f+g) = \int_I f + \int_I g$;
   (ii) $\displaystyle\int_I (\alpha f) = \alpha \int_I f$.

4. **Teorema de Fubini:** Sejam $I \subset \mathbb{R}^n$ e $J \subset \mathbb{R}^m$ intervalos compactos e $f : I \times J \to \mathbb{R}$ uma função integrável à Riemann. Se cada uma das funções $f_\mathbf{x} : J \to \mathbb{R}$ e $f_\mathbf{y} : I \to \mathbb{R}$ definidas por $f_\mathbf{x}(\mathbf{y}) = f_\mathbf{y}(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ são integráveis à Riemann então

$$\int_{I \times J} f = \int_I \left(\int_J f(\mathbf{x}, \mathbf{y})\, dV_m(\mathbf{y}) \right) dV_n(\mathbf{x}) = \int_J \left(\int_I f(\mathbf{x}, \mathbf{y})\, dV_n(\mathbf{x}) \right) dV_m(\mathbf{y}).$$

5. Diz-se que $A \subset \mathbb{R}^n$ tem **conteúdo nulo** se para todo o $\varepsilon > 0$ existe uma família finita de intervalos limitados $\{I_1, \ldots, I_N\}$ tal que

$$A \subset \bigcup_{k=1}^N I_k \qquad \text{e} \qquad \sum_{k=1}^N V_n(I_k) < \varepsilon.$$

6. **Propriedades de conjuntos de conteúdo nulo:**
   (i) Um subconjunto de um conjunto de conteúdo nulo tem conteúdo nulo.
   (ii) A união de uma família finita de conjuntos de conteúdo nulo tem conteúdo nulo.
   (iii) O gráfico de uma função contínua $\mathbf{f} : I \to \mathbb{R}^m$ (onde $I \subset \mathbb{R}^n$ é um intervalo compacto) tem conteúdo nulo em $\mathbb{R}^{m+n}$.
7. Seja $I \subset \mathbb{R}^n$ um intervalo compacto e $f : I \to \mathbb{R}$ uma função limitada. Se o conjunto dos pontos de descontinuidade de f tem conteúdo nulo então f é integrável à Riemann em I.
8. Seja $I \subset \mathbb{R}^n$ um intervalo. A **função característica** do conjunto $A \subset I$ é a função $\chi_A : I \to \mathbb{R}$ definida por
$$\chi_A(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1 \text{ se } \mathbf{x} \in A \\ 0 \text{ se } \mathbf{x} \notin A \end{cases}$$
9. Seja $I \subset \mathbb{R}^n$ um intervalo compacto. O **volume n-dimensional** de A é
$$V_n(A) = \int_I \chi_A.$$
Se $f : I \to \mathbb{R}$ é integrável à Riemann em I, define-se
$$\int_A f = \int_I f\chi_A$$
(portanto $V_n(A) = \int_A 1$).
10. Uma **transformação de coordenadas** é uma função $\mathbf{g} : U \to V$ (com $U, V \subset \mathbb{R}^n$ conjuntos abertos)
    (i) bijectiva;
    (ii) de classe C^1;
    (iii) tal que $\det D\mathbf{g}(\mathbf{x}) \neq 0$ para todo o $\mathbf{x} \in U$.
11. **Teorema de mudança de variáveis:** Sejam $U, V \subset \mathbb{R}^n$ conjuntos abertos limitados, $\mathbf{g} : U \to V$ uma tranformação de coordenadas e $f : V \to \mathbb{R}$ integrável à Riemann. Então
$$\int_V f = \int_U (f \circ \mathbf{g}) |\det D\mathbf{g}|.$$
12. **Coordenadas polares** em $\mathbb{R}^2$: São as coordenadas $(r, \theta) \in]0, +\infty[\times]0, 2\pi[$ relacionadas com as coordenadas Cartesianas usuais (x, y) pela a mudança de coordenadas
$$(x, y) = \mathbf{g}(r, \theta) = (r \cos \theta, r \operatorname{sen} \theta).$$
O Jacobiano desta transformação é
$$\det D\mathbf{g}(r, \theta) = r.$$
13. **Coordenadas cilíndricas** em $\mathbb{R}^3$: São as coordenadas $(\rho, \varphi, z) \in]0, +\infty[\times]0, 2\pi[\times \mathbb{R}$ relacionadas com as coordenadas Cartesianas usuais (x, y, z) pela a mudança de coordenadas
$$(x, y, z) = \mathbf{g}(\rho, \theta, z) = (\rho \cos \theta, \rho \operatorname{sen} \theta, z).$$
O Jacobiano desta transformação é
$$\det D\mathbf{g}(\rho, \theta, z) = \rho.$$

14. **Coordenadas esféricas** em $\mathbb{R}^3$: São as coordenadas $(r, \theta, \varphi) \in \,]0, +\infty[\, \times \,]0, 2\pi[\, \times \,]0, \pi[$ relacionadas com as coordenadas Cartesianas usuais (x, y, z) pela a mudança de coordenadas

$$(x, y, z) = \mathbf{g}(r, \theta, \varphi) = (r \operatorname{sen} \varphi \cos \theta, r \operatorname{sen} \varphi \operatorname{sen} \theta, r \cos \varphi).$$

O Jacobiano desta transformação é

$$\det D\mathbf{g}(r, \theta, \varphi) = r^2 \operatorname{sen} \varphi.$$

15. Se χ_A e uma **função densidade de massa** $\rho : A \to \mathbb{R}^+$ são integráveis à Riemann em A, define-se:

    (i) O **volume** n-dimensional de A:

    $$V = V_n(A) = \int_A 1 \, dV_n.$$

    (ii) A **massa** de A:

    $$M = \int_A \rho \, dV_n.$$

    (iii) A coordenada k do **centro de massa** de A:

    $$\bar{x}^k = \frac{1}{M} \int_A \rho \, x_k \, dV_n.$$

    (iv) A coordenada k do **centróide** de A:

    $$\bar{x}_k = \frac{1}{V} \int_A x_k \, dV_n.$$

    (v) O **momento de inércia** de A em relação ao eixo $\mathbb{R}\mathbf{e}_k$:

    $$I_k = \int_A \rho \sum_{i \neq k} (x_i)^2 \, dV_n.$$

16. **Regra de Leibnitz:** Seja $I \subset \mathbb{R}^n$ um intervalo compacto e $f : I \times \,]a, b[\, \to \mathbb{R}$ uma função contínua tal que $\partial_{n+1} f$ existe e é contínua. Então a função $F : \,]a, b[\, \to \mathbb{R}$ definida por

$$F(t) = \int_I f(\mathbf{x}, t) dV_n(\mathbf{x})$$

é de classe C^1 e

$$F'(t) = \int_I \partial_{n+1} f(\mathbf{x}, t) dV_n(\mathbf{x}).$$

5. Função Inversa e Função Implícita

1. **Teorema da Função Inversa:** Seja $\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ uma função de classe C^1 e $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ tal que $\det D\mathbf{f}(\mathbf{a}) \neq 0$. Então existem conjuntos abertos $U \ni \mathbf{a}$ e $V \ni \mathbf{f}(\mathbf{a})$ tais que $\mathbf{f} : U \to V$ é bijectiva e $\mathbf{f}^{-1} : V \to U$ é de classe C^1. Além disso, para todo o $\mathbf{x} \in U$

$$D\mathbf{f}^{-1}(\mathbf{f}(\mathbf{x})) = [D\mathbf{f}(\mathbf{x})]^{-1}.$$

2. **Teorema da Função Implícita:** Seja $\mathbf{F} : \mathbb{R}^{n+m} \to \mathbb{R}^m$ uma função de classe C^1 e $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \in \mathbb{R}^{n+m}$ tal que $\mathbf{F}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \mathbf{0}$ e $\det \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{y}}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \neq 0$. Então existem conjuntos abertos $U \ni \mathbf{a}$ e $V \ni \mathbf{b}$, e uma função $\mathbf{f} : U \to V$ de classe C^1, tais que

$$\{(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in U \times V : \mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{0}\} = \{(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in U \times V : \mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x})\}.$$

Além disso,

$$D\mathbf{f}(\mathbf{a}) = -\left[\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{y}}(\mathbf{a}, \mathbf{b})\right]^{-1} \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{a}, \mathbf{b}).$$

6. Variedades Diferenciáveis e Extremos Condicionados

1. Um conjunto $M \subset \mathbb{R}^n$ é uma **variedade diferenciável de dimensão** $m \in \{1, \ldots, n-1\}$ se para qualquer ponto $\mathbf{a} \in M$ existe um conjunto aberto $U \ni \mathbf{a}$ e uma função $\mathbf{f} : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^{n-m}$ de classe C^1 tais que
$$M \cap U = \mathrm{Graf}(\mathbf{f}) \cap U$$
para alguma ordenação das coordenadas Cartesianas de $\mathbb{R}^n$.
2. $M \subset \mathbb{R}^n$ é uma variedade diferenciável de dimensão m **sse** para qualquer ponto $\mathbf{a} \in M$ existe um conjunto aberto $U \ni \mathbf{a}$ e uma função $\mathbf{F} : U \to \mathbb{R}^{n-m}$ de classe C^1 tais que
   (i) $M \cap U = \{\mathbf{x} \in U : \mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}\}$;
   (ii) $\mathrm{car}\, D\mathbf{F}(\mathbf{a}) = n - m$.
3. Se $M \subset \mathbb{R}^n$ é uma variedade de dimensão m, o conjunto $T_{\mathbf{a}}M$ de todos os vectores tangentes a M no ponto $\mathbf{a} \in M$ é um espaço vectorial de dimensão m, dito o **espaço tangente** a M no ponto $\mathbf{a}$. O seu complemento ortogonal $T_{\mathbf{a}}^{\perp}M$ é um espaço vectorial de dimensão $n - m$, dito o **espaço normal** a M no ponto $\mathbf{a}$.
4. Sejam $M \subset \mathbb{R}^n$ uma variedade de dimensão m, $\mathbf{a} \in M$, $U \ni \mathbf{a}$ aberto e $\mathbf{F} : U \to \mathbb{R}^{n-m}$ tais que $M \cap U = \{\mathbf{x} \in U : \mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}\}$ com $\mathrm{car}\, D\mathbf{F}(\mathbf{a}) = n - m$. Então
$$T_{\mathbf{a}}^{\perp}M = \mathcal{L}\{\nabla F_1(\mathbf{a}), \ldots, \nabla F_{n-m}(\mathbf{a})\}.$$
5. **Teorema dos Extremos Condicionados:** Sejam $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável e $M \subset \mathbb{R}^n$ uma variedade de dimensão m. Se a restrição de f a M tem um extremo local em $\mathbf{a} \in M$ então $\nabla f(\mathbf{a}) \in T_{\mathbf{a}}^{\perp}M$.
6. **Regra dos Multiplicadores de Lagrange:** Nas condições do teorema anterior, se $U \ni \mathbf{a}$ é um conjunto aberto e $\mathbf{F} : U \to \mathbb{R}^{n-m}$ é tal que $M \cap U = \{\mathbf{x} \in U : \mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}\}$ com $\mathrm{car}\, D\mathbf{F}(\mathbf{a}) = n - m$, existem constantes $\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-m} \in \mathbb{R}$ (ditas os **multiplicadores de Lagrange**) tais que
$$\nabla(f + \lambda_1 F_1 + \ldots + \lambda_{n-m} F_{n-m})(\mathbf{a}) = \mathbf{0}.$$

7. Integrais em Variedades

1. Uma **parametrização** de uma variedade-m $M \subset \mathbb{R}^n$ é uma aplicação $\mathbf{g} : U \to M$ (com $U \subset \mathbb{R}^m$ aberto)
   (i) injectiva;
   (ii) de classe C^1;

(iii) tal que $\operatorname{car} D\mathbf{g} = m$ para todo o $\mathbf{t} \in U$.

2. Se $\mathbf{g} : U \subset \mathbb{R}^m \to M$ é uma parametrização da variedade-m M então

$$T_{\mathbf{g}(\mathbf{t})}M = \mathcal{L}\left\{\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial t_1}(\mathbf{t}), \dots, \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial t_m}(\mathbf{t})\right\}.$$

3. Se $M \subset \mathbb{R}^n$ é uma variedade-m e $\mathbf{a} \in M$ então existe um conjunto aberto $V \ni \mathbf{a}$ tal que $M \cap V$ é a imagem de uma parametrização $\mathbf{g} : U \subset \mathbb{R}^m \to M$.

4. Se $M \subset \mathbb{R}^n$ é uma variedade-m, $\mathbf{g} : U \subset \mathbb{R}^m \to M$ é uma parametrização cuja imagem é M excepto um número finito de variedades de dimensão inferior a m, e $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é uma função contínua então

$$\int_M f = \int_U f(\mathbf{g}(\mathbf{t}))\sqrt{\det\left(D\mathbf{g}^t D\mathbf{g}\right)}\, dt_1 \dots dt_m,$$

5. (i) Se M é uma variedade-1 e $\mathbf{g} :]a, b[\to \mathbb{R}$ é uma parametrização então

$$\int_M f = \int_a^b f(\mathbf{g}(t)) \left\|\mathbf{g}'(t)\right\| dt.$$

(ii) Se M é uma variedade-2 em $\mathbb{R}^3$ e $\mathbf{g} : T \subset \mathbb{R}^2 \to M$ é uma parametrização então

$$\int_M f = \int_T f(\mathbf{g}(t)) \left\|(D_1\mathbf{g}(t) \times D_2\mathbf{g}(t))\right\| dt.$$

6. Se $M \subset \mathbb{R}^n$ é uma variedade de dimensão m orientável e é dada uma **função densidade de massa por unidade de volume m-dimensional** $\sigma : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^+$, define-se:

(i) O **volume** m-dimensional de M:

$$V = V_m(M) = \int_M 1\, dV_m.$$

(ii) A **massa** de M:

$$\mathcal{M} = \int_M \sigma\, dV_m.$$

(iii) A coordenada k do **centro de massa** de M:

$$\bar{x}_k = \frac{1}{\mathcal{M}} \int_M \sigma\, x_k\, dV_m.$$

(iv) A coordenada k do **centróide** de M:

$$\bar{x}_k = \frac{1}{V} \int_M x_k\, dV_m.$$

(v) O **momento de inércia** de A em relação ao eixo $\mathbb{R}\mathbf{e}_k$:

$$I_k = \int_M \sigma \sum_{i \neq k} (x_i)^2\, dV_m.$$

8. Integrais de Linha, Campos Gradientes e Campos Fechados

1. Se $\mathbf{F} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ é um campo vectorial contínuo e C é uma variedade-1 (curva) com parametrização $\mathbf{g} : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ então o **integral de linha** de $\mathbf{F}$ ao longo de C no sentido de $\mathbf{g}$ é
$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{g} = \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{g}(t)) \cdot \mathbf{g}'(t)\, dt.$$
2. O integral de linha depende apenas do sentido em que a parametrização percorre a curva: inverter o sentido corresponde a mudar o sinal.
3. Em Física, $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{g}$ representa o trabalho realizado pela força $\mathbf{F}$ ao longo de C, ou seja, a energia transferida pela força $\mathbf{F}$ para uma partícula que percorre a curva C.
4. **Teorema Fundamental do Cálculo para Integrais de Linha:** Se $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é um campo escalar de classe C^1 e C é uma curva parametrizada por $\mathbf{g} : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ então
$$\int_C \nabla\phi \cdot d\mathbf{g} = \phi(\mathbf{g}(b)) - \phi(\mathbf{g}(a)).$$
5. Em Física, uma força da forma $\mathbf{F} = \nabla\phi$ diz-se **conservativa**, e o campo escalar ϕ diz-se um **potencial** para $\mathbf{F}$.
6. Se $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é um campo escalar de classe C^1 e C é uma curva fechada então
$$\oint_C \nabla\phi \cdot d\mathbf{g} = 0.$$
7. Um campo vectorial $\mathbf{F} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ de classe C^1 diz-se **fechado** se
$$\frac{\partial F_i}{\partial x_j} = \frac{\partial F_j}{\partial x_i} \qquad (i, j = 1, \ldots, n)$$
(ou seja, se $D\mathbf{F}$ é simétrica).
8. Se $\mathbf{F} = \nabla\phi$ para algum campo escalar $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de classe C^2 então $\mathbf{F}$ é fechado.
9. Um conjunto $A \subset \mathbb{R}^n$ diz-se **conexo por arcos** se dados dois pontos $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in A$ existe um caminho $\mathbf{g} : [0, 1] \to A$ tal que $\mathbf{g}(0) = \mathbf{a}$ e $\mathbf{g}(1) = \mathbf{b}$.
10. Seja $U \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto conexo por arcos. Um campo vectorial $\mathbf{F} : U \to \mathbb{R}^n$ é um campo gradiente em U **sse**
$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{g} = 0$$
para qualquer curva fechada $C \subset U$.
11. Seja $A \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto não vazio. Diz-se que dois caminhos fechados $\mathbf{g}, \mathbf{h} : [a, b] \to A$ são **caminhos homotópicos** em A se existe uma função contínua $\mathbf{H} : [a, b] \times [0, 1] \to A$ (dita uma **homotopia**) tal que $\mathbf{H}(t, 0) = \mathbf{g}(t)$ e $\mathbf{H}(t, 1) = \mathbf{h}(t)$ para todo o $t \in [a, b]$ e $\mathbf{H}(a, s) = \mathbf{H}(b, s)$ para todo o $s \in [0, 1]$.
12. Seja $U \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto, $C_1, C_2 \subset D$ curvas fechadas com parametrizações homotópicas em U, e $\mathbf{F} : U \to \mathbb{R}^n$ um campo fechado. Então
$$\oint_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{g} = \oint_{C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{g}.$$

13. Diz-se que $A \subset \mathbb{R}^n$ é **simplesmente conexo** se A é conexo por arcos e qualquer caminho fechado $\mathbf{g} : [a, b] \to A$ é homotópico em A a um caminho constante.
14. Seja $U \subset \mathbb{R}^n$ um aberto simplesmente conexo e $\mathbf{F} : U \to \mathbb{R}^n$ um campo fechado. Então $\mathbf{F}$ é um campo gradiente.

9. Teorema de Green, Teorema da Divergência e Teorema de Stokes

1. Um **domínio regular** é um conjunto aberto limitado $U \subset \mathbb{R}^n$ cuja fronteira é uma união de finitas variedades de dimensão $n-1$ com vector normal unitário exterior $\mathbf{n} : \partial U \to \mathbb{R}^n$ bem definido. Se $n = 2$ então a **orientação canónica** é o sentido que resulta de rodar o vector normal unitário exterior $90°$ no sentido directo.
2. **Teorema de Green:** Seja $U \subset \mathbb{R}^2$ um domínio regular e $\mathbf{F} \equiv (P, Q) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ um campo vectorial de classe C^1. Então
$$\oint_{\partial U} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{g} \equiv \oint_{\partial U} P dx + Q dy = \int_U \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx\, dy.$$
3. Uma variedade de dimensão $n-1$ (**hipersuperfície**) $M \subset \mathbb{R}^n$ diz-se **orientável** se existe um vector normal unitário **contínuo** $\mathbf{n} : M \to \mathbb{R}^n$ (portanto $\mathbf{n}(\mathbf{x}) \in T_{\mathbf{x}}^{\perp} M$ e $\|\mathbf{n}(\mathbf{x})\| = 1$ para todo o $\mathbf{x} \in M$).
4. Seja $M \subset \mathbb{R}^n$ uma hipersuperfície orientável com vector normal unitário $\mathbf{n} : M \to \mathbb{R}^n$ e $\mathbf{F} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ um campo vectorial contínuo. O **fluxo** de $\mathbf{F}$ através de M no sentido de $\mathbf{n}$ é dado por
$$\int_M \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}.$$
5. Se $M \subset \mathbb{R}^3$ é uma superfície orientável e $\mathbf{g} : T \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^n$ é uma parametrização então
$$\int_M \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} = \int_T \mathbf{F}(\mathbf{g}(t)) \cdot (D_1\mathbf{g}(t) \times D_2\mathbf{g}(t))\, dt.$$
6. No caso em que $\mathbf{F} = \rho\,\mathbf{v}$, onde ρ e $\mathbf{v}$ são a densidade e velocidade de um fluido, $\displaystyle\int_M \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}$ é a massa de fluido que atravessa M por unidade de tempo no sentido de $\mathbf{n}$.
7. Se $\mathbf{F} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ é um campo vectorial de classe C^1, a sua **divergência** é o campo escalar
$$\operatorname{div} \mathbf{F} \equiv \nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{\partial F_1}{\partial x_1} + \ldots + \frac{\partial F_n}{\partial x_n}.$$
8. **Teorema da Divergência:** Se $\mathbf{F} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ é um campo vectorial de classe C^1 e $U \subset \mathbb{R}^n$ é um domínio regular então
$$\int_U \operatorname{div} \mathbf{F} = \oint_{\partial U} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n},$$
onde $\mathbf{n}$ é a normal unitária **exterior**.
9. Se $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ é um campo vectorial de classe C^1, o seu **rotacional** é o campo vectorial
$$\operatorname{rot} \mathbf{F} \equiv \nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}, \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}, \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right).$$

10. **Teorema de Stokes:** Se $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ é um campo vectorial de classe C^1 e M é uma superfície com bordo orientável, então

$$\int_M \operatorname{rot} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} = \oint_{\partial M} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{g},$$

onde o **bordo** ∂M deve ser percorrido no sentido tal que o produto externo do vector tangente ao bordo pela normal unitária $\mathbf{n}$ aponte **para fora** da superfície.

11. **Regra da Mão Direita:** Uma maneira simples de recordar a relação entre as orientações da superfície e do seu bordo no Teorema de Stokes é a seguinte: desenhando um pequeno quadrado na superfície tal que um dos seus lados é um pedaço do bordo, a orientação correcta do bordo é a que induz a circulação ao longo dos lados do quadrado que fornece a normal unitária $\mathbf{n}$ por aplicação da regra da mão direita (fechando a mão direita no sentido da circulação no quadrado, o polegar aponta na direcção da normal).

12. Se $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ é um campo escalar de classe C^2, então

$$\operatorname{rot}(\nabla \phi) = \mathbf{0}.$$

13. Se $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ é um campo vectorial de classe C^2, então

$$\operatorname{div} \operatorname{rot} \mathbf{F} = 0.$$

14. $A \subset \mathbb{R}^n$ diz-se **em estrela** se existe um ponto $\mathbf{a} \in A$ tal que $[\mathbf{a}, \mathbf{x}] \subset A$ para todo o $\mathbf{x} \in A$, onde $[\mathbf{a}, \mathbf{x}]$ designa o segmento de recta de extremos $\mathbf{a}$ e $\mathbf{x}$.

15. Seja $U \subset \mathbb{R}^3$ um conjunto aberto em estrela e $\mathbf{F} : U \to \mathbb{R}^3$ um campo vectorial de classe C^1. Se $\operatorname{div} \mathbf{F} = 0$ então $\mathbf{F} = \operatorname{rot} \mathbf{A}$ para algum campo vectorial $\mathbf{A} : U \to \mathbb{R}^3$ (dito um **potencial vector** para $\mathbf{F}$).