Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

Geometria Riemanniana
Teste de Recuperação 1 – 16 de Janeiro de 2006

Apresente todos os cálculos e justificações relevantes.
Duração: 1 hora e 30 minutos.

(3 val.) (1) Mostre que o campo $X = x^2 \frac{\partial}{\partial x}$ definido em $\mathbb{R}$ não é completo.

(3 val.) (2) (a) Se $A \in \mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$, mostre que existe $\lambda \in \mathbb{R} \cup i\mathbb{R}$ tal que

$$e^A = (\cosh \lambda) I + \frac{\sinh \lambda}{\lambda} A.$$

(3 val.) (b) Mostre que a aplicação exponencial $\exp : \mathfrak{sl}(2,\mathbb{R}) \to SL(2;\mathbb{R})$ não é sobrejectiva.

(3) Considere a forma-2

$$\omega = \frac{xdy \wedge dz - ydx \wedge dz + zdx \wedge dy}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$$

definida em $\mathbb{R}^3 \backslash \{(0,0,0)\}$.

(3 val.) (a) Mostre que ω é fechada.

(3 val.) (b) Calcule $\int_{S^2} \omega$. Será ω exacta ?

(1 val.) (c) Das alíneas anteriores o que é que pode concluir acerca de $H^2(\mathbb{R}^3 \backslash \{(0,0,0)\})$?

(4 val.) (4) Uma **superfície de Riemann** M é uma variedade topológica conexa, de dimensão real 2, que tem um atlas maximal $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, z_\alpha)\}$ onde cada subconjunto $U_\alpha \subset \mathbb{C}$ é um conjunto aberto e cada função $z_\alpha : U_\alpha \to M$ é um homeomorfismo para um conjunto aberto de M tal que, se $W = z_\alpha(U_\alpha) \cap z_\beta(U_\beta) \neq 0$, as *funções de transição*

$$f_{\alpha\beta} = z_\beta^{-1} \circ z_\alpha : z_\alpha^{-1}(W) \to z_\beta(W)$$

são funções **holomorfas**.
Mostre que uma superfície de Riemann é uma variedade orientável.