

Geometria Riemanniana  
 Teste de Recuperação 2 – 16 de Janeiro de 2006

Apresente todos os cálculos e justificações relevantes.

Duração: 1 hora e 30 minutos.

- (1) Seja  $M$  a imagem da parametrização  $\varphi : (0, +\infty) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$  definida por

$$\varphi(u, v) = (u \cos v, u \sin v, v),$$

e seja  $N$  a imagem da parametrização  $\psi : (0, +\infty) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$  dada por

$$\psi(u, v) = (u \cos v, u \sin v, \log u).$$

Consideramos as métricas  $g$  e  $h$  induzidas em  $M$  e  $N$  pela métrica Euclidiana de  $\mathbb{R}^3$ .

(2.5 val.)

- (a) Mostre que

$$g = du \otimes du + (1 + u^2)dv \otimes dv.$$

(2.5 val.)

- (b) Mostre que

$$h = \frac{1 + u^2}{u^2} du \otimes du + u^2 dv \otimes dv.$$

(3 val.)

- (c) Mostre que a curvatura de Gauss de  $N$  é

$$K_N = -\frac{1}{(1 + u^2)^2}.$$

(3 val.)

- (d) Calcule a curvatura de Gauss de  $M$  e conclua que a aplicação  $f : M \rightarrow N$  definida por

$$f(\varphi(u, v)) = \psi(u, v)$$

preserva a curvatura de Gauss.

(3 val.)

- (e) Mostre que  $f$  não é uma isometria local.

- (2) Seja  $M$  uma variedade diferenciável de dimensão  $n$ ,  $\nabla$  a conexão de Levi-Civita associada à métrica  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  e  $\tilde{\nabla}$  a conexão de Levi-Civita associada à métrica  $\langle \langle \cdot, \cdot \rangle \rangle = e^{2\rho} \langle \cdot, \cdot \rangle$ , onde  $\rho$  é uma função diferenciável. (As métricas  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  e  $\langle \langle \cdot, \cdot \rangle \rangle$  dizem-se **conformes**).

(3 val.)

- (a) Mostre que

$$\tilde{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + d\rho(X)Y + d\rho(Y)X - \langle X, Y \rangle \text{grad } \rho.$$

Recorde que  $\text{grad } \rho$  é o campo vectorial que satisfaz  $\langle \text{grad } \rho, X \rangle = d\rho(X)$ , para qualquer  $X \in \chi(M)$ .

(3 val.)

- (b) O **Laplaciano** de  $f \in C^\infty(M)$  é definido localmente por

$$\Delta f = \sum_{i=1}^n dx^i \left( \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \text{grad } f \right).$$

Mostre que se  $n = 2$  então  $\tilde{\Delta} f = e^{-2\rho} \Delta f$ .