

Geometria Riemanniana  
Teste 1 – 25 de Outubro de 2005

Apresente todos os cálculos e justificações relevantes.

Duração: 1 hora e 30 minutos.

(1) Considere os seguintes campos vectoriais em  $\mathbb{R}^3$ :

$$X = y \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial y}, \quad Y = z \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial z}, \quad Z = \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z}.$$

(3 val.)

(a) Calcule  $[X, Y]$  e  $[X, Z]$ .

(4 val.)

(b) Calcule o fluxo do campo  $X + Y$ .

(2 val.)

(c) Diga, justificando, se existem coordenadas  $(x^1, x^2, x^3)$  em  $\mathbb{R}^3$  tais que  $Y = \frac{\partial}{\partial x^2}$  e  $Z = \frac{\partial}{\partial x^3}$ .

(3 val.)

(2) Sejam  $G_1$  e  $G_2$  grupos de Lie e  $f : G_1 \rightarrow G_2$  um homomorfismo de grupos de Lie. Mostre que dado um campo vectorial invariante à esquerda  $X$  em  $G_1$  existe um único campo vectorial invariante à esquerda  $Y$  em  $G_2$  que é  $f$ -relacionado com  $X$ , ou seja,  $Y = f_* X$ .

(3) Seja  $f : S^n \rightarrow S^n$  a aplicação antípoda. Recorde que o espaço projectivo real  $n$ -dimensional é a variedade  $\mathbb{R}P^n = S^n / \sim$  onde  $\sim$  é a relação de equivalência  $x \sim -x$  que identifica um ponto com o seu antípoda. Seja  $\pi : S^n \rightarrow \mathbb{R}P^n$  a projecção natural.

(3 val.)

(a) Mostre que  $\omega \in \Omega^k(S^n)$  é da forma  $\omega = \pi^* \theta$  para  $\theta \in \Omega^k(\mathbb{R}P^n)$  sse  $f^* \omega = \omega$ .

(3 val.)

(b) Considere a forma  $\omega \in \Omega^n(S^n)$  definida por

$$\omega = \sum_{i=1}^{n+1} (-1)^{i+1} x^i dx^1 \wedge \dots \wedge dx^{i-1} \wedge dx^{i+1} \wedge \dots \wedge dx^{n+1},$$

onde as coordenadas  $x^i$  são as restrições a  $S^n$  das coordenadas usuais em  $\mathbb{R}^{n+1}$ . Sabendo que  $\omega$  é uma forma volume em  $S^n$ , mostre que  $\mathbb{R}P^n$  é orientável sse  $n$  é ímpar.

(2 val.)

(c) Mostre que se  $\mathbb{R}P^n$  é orientável e  $\theta \in \Omega^n(\mathbb{R}P^n)$  então

$$\int_{S^n} \pi^* \theta = 2 \int_{\mathbb{R}P^n} \theta.$$