Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

Geometria Riemanniana
Teste 1 – 25 de Outubro de 2005

Apresente todos os cálculos e justificações relevantes.

Duração: 1 hora e 30 minutos.

(1) Considere os seguintes campos vectoriais em $\mathbb{R}^3$:

$$X = y\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial y}, \qquad Y = z\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial z}, \qquad Z = \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z}.$$

(3 val.) (a) Calcule $[X, Y]$ e $[X, Z]$.

(4 val.) (b) Calcule o fluxo do campo $X + Y$.

(2 val.) (c) Diga, justificando, se existem coordenadas (x^1, x^2, x^3) em $\mathbb{R}^3$ tais que $Y = \frac{\partial}{\partial x^2}$ e $Z = \frac{\partial}{\partial x^3}$.

(3 val.) (2) Sejam G_1 e G_2 grupos de Lie e $f : G_1 \to G_2$ um homomorfismo de grupos de Lie. Mostre que dado um campo vectorial invariante à esquerda X em G_1 existe um único campo vectorial invariante à esquerda Y em G_2 que é f–relacionado com X, ou seja, $Y = f_*X$.

(3) Seja $f : S^n \to S^n$ a aplicação antípoda. Recorde que o espaço projectivo real n–dimensional é a variedade $\mathbb{R}P^n = S^n/\sim$ onde $\sim$ é a relação de equivalência $x \sim -x$ que identifica um ponto com o seu antípoda. Seja $\pi : S^n \to \mathbb{R}P^n$ a projecção natural.

(3 val.) (a) Mostre que $\omega \in \Omega^k(S^n)$ é da forma $\omega = \pi^*\theta$ para $\theta \in \Omega^k(\mathbb{R}P^n)$ sse $f^*\omega = \omega$.

(3 val.) (b) Considere a forma $\omega \in \Omega^n(S^n)$ definida por

$$\omega = \sum_{i=1}^{n+1} (-1)^{i+1} x^i dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^{i-1} \wedge dx^{i+1} \wedge \ldots \wedge dx^{n+1},$$

onde as coordenadas x^i são as restrições a S^n das coordenadas usuais em $\mathbb{R}^{n+1}$. Sabendo que ω é uma forma volume em S^n, mostre que $\mathbb{R}P^n$ é orientável sse n é ímpar.

(2 val.) (c) Mostre que se $\mathbb{R}P^n$ é orientável e $\theta \in \Omega^n(\mathbb{R}P^n)$ então

$$\int_{S^n} \pi^*\theta = 2\int_{\mathbb{R}P^n} \theta.$$