Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

Geometria Riemanniana
Teste 2 – 20 de Dezembro de 2005

Apresente todos os cálculos e justificações relevantes.
Duração: 1 hora e 30 minutos.

(1) Considere a aplicação $f : (0, 2\pi) \times (0, 2\pi) \to \mathbb{R}^3$ definida por
$$f(\theta, \varphi) = ((2 + \operatorname{sen}\theta) \cos\varphi, (2 + \operatorname{sen}\theta) \operatorname{sen}\varphi, \cos\theta),$$
que parametriza o toro
$$T = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z^2 + (\sqrt{x^2 + y^2} - 2)^2 = 1 \right\}.$$

(3 val.) (a) Mostre que nas coordenadas (θ, φ) a métrica em T induzida pela métrica Euclidiana de $\mathbb{R}^3$ é dada por
$$g = d\theta \otimes d\theta + (2 + \operatorname{sen}\theta)^2 d\varphi \otimes d\varphi.$$

(2 val.) (b) Calcule as formas da conexão associadas ao referencial ortonormado
$$E_1 = \frac{\partial}{\partial\theta}, \quad E_2 = \frac{1}{2 + \operatorname{sen}\theta} \frac{\partial}{\partial\varphi}.$$

(2 val.) (c) Mostre que a curvatura de Gauss de T é
$$K = \frac{\operatorname{sen}\theta}{2 + \operatorname{sen}\theta}.$$

(2 val.) (d) Sem fazer cálculos, indique, justificando, o valor do integral
$$\int_T \frac{\operatorname{sen}\theta}{2 + \operatorname{sen}\theta}.$$

(3 val.) (e) Prove que T é geodesicamente completa. Indique duas (imagens de) geodésicas distintas de T que passam pelo ponto $(0, 3, 0)$.

(3 val.) (f) Mostre que as equações locais de uma geodésica são:
$$\ddot{\theta} - \cos\theta(2 + \operatorname{sen}\theta)(\dot{\varphi})^2 = 0;$$
$$\ddot{\varphi} + \frac{2\cos\theta}{2 + \operatorname{sen}\theta} \dot{\varphi}\,\dot{\theta} = 0.$$

(5 val.) (2) Seja (M, g) uma variedade Riemanniana de dimensão 2 com curvatura de Gauss K negativa em todos os pontos. Prove que uma geodésica fechada em M não é homotópica a um ponto.