COLOCAÇÃO DE UM SATÉLITE EM ÓRBITA GEOESTACIONÁRIA

1. Problema da propulsão

Considera um sistema auto propulsionado de massa inicial m_0, equipado com um motor de propulsão capaz de expelir por unidade de tempo uma massa de gases igual a β a uma velocidade de exaustão igual a s.

Nota: Sendo $[0, T]$ o intervalo de tempo de propulsão, tem-se que $T < m_0/\beta$. Chama-se factor de construção ao quociente $m_0/m(T)$ onde $m(T)$ é a massa final do veículo (uma vez consumido todo o propergol).

Então a massa total do sistema no intervalo de tempo de propulsão é variável, $m = m(t)$, e dada por

$$m = m_0 - \beta t \ .$$

Supõe o sistema colocado no espaço livre. O movimento do veículo pode ser calculado a partir da lei de conservação do momento linear, $\frac{dP}{dt} = 0$, onde P é o momento linear total. Tomando $P = P_v + P_s$ onde P_s é momento linear dos gases expelidos, que satisfaz a relação

$$\frac{dP_s}{dt} = (v - s)\frac{d(m_0 - m)}{dt} \ ,$$

e $P_v = mv$ é o momento linear do veículo (foguete), obtem-se a equação para a velocidade do veículo:

$$m\frac{dv}{dt} - \beta s = 0 \ .$$

Mostra que

$$v(t) = s \log \frac{m_0}{m_0 - \beta t} \ .$$

Faz uma simulação do movimento do veículo.

Questões interessantes:

- Qual é o tempo de propulsão necessário para o veículo atingir uma velocidade igual a um múltiplo n da velocidade de exaustão s?

- Qual é a aceleração máxima a que o veículo fica sujeito?

Para um satélite de massa $m_0 = 2000kg$ com um motor de propulsão com $s = 4km/s$ e $\beta = 10kg/s$ calcula o tempo de propulsão para se obter um incremento de velocidade de $v = 2,5km/s$.

2. Velocidade Orbital

Calcula a velocidade orbital de um satélite que descreve uma órbita circular em função do raio da órbita. Será que depende da massa do satélite? Determina a velocidade orbital de um satélite em órbita circular à altitude de $350km$ (órbita baixa).

Questões interessantes:

- Qual o período de rotação?

- Qual a altitude de um satélite em órbita geoestacionária?

Nota: Relembrar que no movimento circular uniforme a intensidade da força centrífuga é dada por mv^2/r.

3. Movimento Central

Pela lei de Newton, o movimento planar de um corpo de massa m num campo de forças central é regido pelas equações:

$$\begin{cases} mx'' = \dfrac{x}{r}F(r) \\ my'' = \dfrac{y}{r}F(r) \end{cases}$$

onde $r^2 = x^2 + y^2$ e F designa a intensidade da força. Passando para coordenadas polares $x = r\cos\theta$, $y = r\,\mathrm{sen}\,\theta$, obtém as equações:

$$\begin{cases} mr^2\theta' = L \\ mr'' - \dfrac{L^2}{mr^3} = F(r) \end{cases}$$

onde L é constante e designa o momento angular.

Nota: A primeira equação é conhecida por lei de conservação do momento angular.

Para o campo gravítico, F é dada por:

$$F(r) = -G\frac{mM}{r^2}$$

onde M designa a massa da Terra e G a constante universal de gravitação. Fazendo a mudança de variáveis $r = \frac{1}{u}$, mostra que o movimento de um corpo de massa m no campo gravítico satisfaz a equação diferencial

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = \frac{m^2MG}{L^2}$$

cujas soluções são da forma:

$$u = K(1 + \varepsilon\cos(\theta - \theta_0)) \text{ com } K = \frac{m^2MG}{L^2}$$

onde ε e θ_0 são constantes arbitrárias, sendo ε não negativa. Toma para θ_0 o valor $\theta_0 = 0$. Tenta mostrar que se a constante ε, que se designa por excentricidade, satisfaz $\varepsilon < 1$ então a órbita descrita por m é uma elipse com a origem num dos seus focos. Calcula os seus eixos maior e menor (vê a figura).

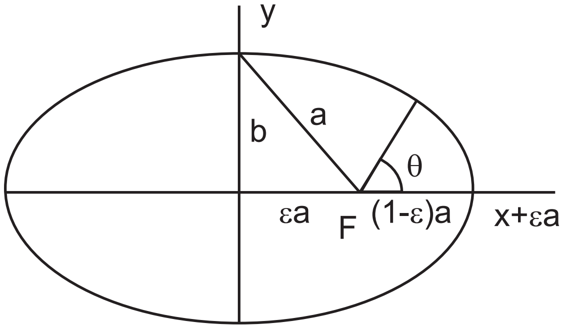

FIGURA 1. Elipse com foco F e excentricidade ε: $(\frac{x+\varepsilon a}{a})^2 + (\frac{y}{b})^2 = 1$.

Tratando-se de uma órbita elíptica descrita por um satélite em torno da Terra, calcula o seu perigeu r_0 e o seu apogeu r_1, isto é, a distância mínima e a distância máxima do satélite ao centro da Terra.

4. Órbita de transferência

Uma órbita elíptica, descrita em torno da Terra por um satélite de massa m, satisfaz a equação:

$$\frac{1}{r} = K(1 + \varepsilon \cos\theta) \ , \ K = \frac{m^2 MG}{L^2} \ .$$

Mostra que a constante L do momento angular é dada por

$$L = m\sqrt{2MG}\sqrt{\frac{r_0 r_1}{r_0 + r_1}}$$

onde r_0 e r_1 designam respectivamente as distâncias ao perigeu e ao apogeu da órbita, isto é, as distâncias mínima e máxima do satélite ao centro da Terra. Como a velocidade orbital no perigeu v_1, e no apogeu v_2, não tem componente radial tem-se que

$$v_0 = r_0\theta' \ , \ v_1 = r_1\theta' \ .$$

Usando a lei de conservação do momento angular, $L = mr^2\theta'$, determina expressões para as velocidades orbitais do satélite no seu perigeu e no seu apogeu.

Questão interessante:

- Qual a expressão da velocidade orbital?

Projecto

Hohmann introduziu em 1925 o conceito de órbita de transferência para designar uma órbita elíptica com o perigeu sobre uma órbita circular dada e o apogeu sobre outra órbita circular também dada.

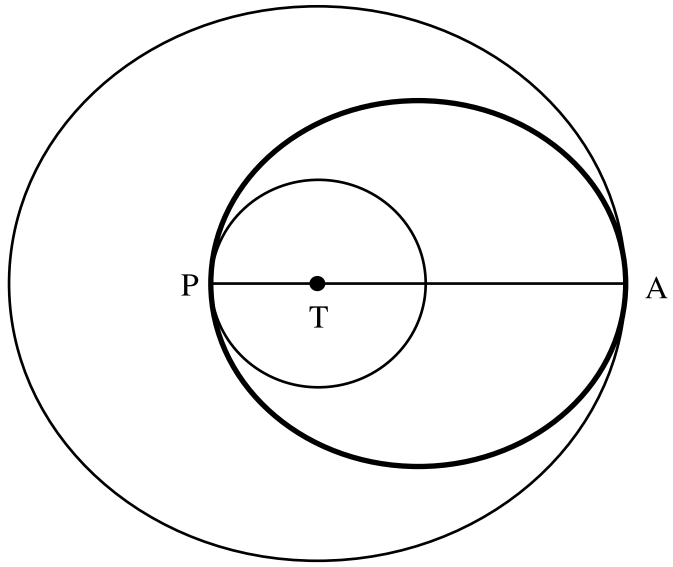

FIGURA 2. Órbita de transferência.

Pretende-se calcular uma órbita elíptica de transferência entre uma órbita circular baixa com $350km$ de altitude e uma órbita geoestacionária. Considera que o satélite é auto propulsionado, tem massa inicial $m_0 = 2000kg$, e possui um motor de propulsão com velocidade de exaustão $s = 4km/s$ e quantidade de massa ejectada por unidade de tempo $\beta = 10kg/s$. Determina o tempo de propulsão necessário para que o satélite faça a transferência da órbita circular baixa para a órbita elíptica no perigeu. Calcula também o tempo de propulsão necessária para se fazer a transferência para a órbita geoestacionária no apogeu.

Questão interessante:

- Qual a massa do satélite que se consegue por este processo colocar numa órbita geoestacionária?

Sugestão adicional: Consulta os seguintes sites

http://www.esa.int/esaCP/SEMW6P9ATME_index_1.html
http://www.braeunig.us/space/orbmech.htm
http://www.carljohansen.co.uk/hohmann/
http://www.around.com/ariane.html