Cap3 Condicionamento de sistemas lineares

III.1.

1

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 10^{-6} \end{bmatrix}$$

- $Ax = b$, com $b = [1 \;\; 10^{-6}]^T$ tem solução $x = [1 \;\; 1]^T$

a) $cond_\infty(A) = \|A\|_\infty \|A^{-1}\|_\infty$

$\|A\|_\infty =$ max das somas dos módulos dos elems. de cada linha

$= \max\{|1| + 0, \; 0 + |10^{-6}|\} = 1$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/10^{-6} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 10^{6} \end{bmatrix}$$

por A ser diagonal

logo $\|A^{-1}\|_\infty = \max\{|1| + 0, \; 0 + |10^6|\}$
$= 10^6$

$cond_\infty(A) = 1 \times 10^6 = 10^6 \rightarrow$ muito maior que 1

$|\varepsilon| > 0$

b) $A\tilde{x} = \tilde{b}$, com $\tilde{b} = [1+\varepsilon \;\; 10^{-6}]^T$
("perturbou-se" b, lado direito de $Ax=b$)

c) Calcular $\|\delta_b\|_\infty = \dfrac{\|b - \tilde{b}\|_\infty}{\|b\|_\infty}$

$b - \tilde{b} = [1 - 1 - \varepsilon \;\; 10^{-6} - 10^{-6}]^T = [-\varepsilon \;\; 0]^T$

$\|b - \tilde{b}\|_\infty = \max\{|-\varepsilon|, 0\}$ máx. dos módulos das componentes
$= |\varepsilon|$

$\|b\|_\infty = \max\{|1|, |10^{-6}|\}$
$= 1$

$\|\delta_b\|_\infty = \dfrac{|\varepsilon|}{1} = |\varepsilon|$

(ii) $\|\delta_x\|_\infty = \dfrac{\|x-\tilde{x}\|_\infty}{\|x\|_\infty}$

é preciso $\tilde{x}$:

$$A\tilde{x} = \tilde{b} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 10^{-6} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+\varepsilon \\ 10^{-6} \end{bmatrix}$$

$\tilde{x}_1 = 1+\varepsilon$ $\qquad \tilde{x} = [1+\varepsilon \quad 1]^T$

$\tilde{x}_2 = 10^6 \cdot 10^{-6} = 1$

$x - \tilde{x} = [1-1-\varepsilon \quad 1-1]^T = [-\varepsilon \quad 0]^T$

$\|x-\tilde{x}\|_\infty = \max\{|-\varepsilon|, 0\} = |-\varepsilon| = |\varepsilon|$

$\|\delta_x\|_\infty = |\varepsilon|$

$\gg 1$ indicador de mau condicionamento

Comentar

1º Pela fórmula $\|\delta_x\|_\infty \leq \underbrace{\mathrm{cond}_\infty(A)}_{10^6} \|\delta_b\|_\infty$

(que dá uma previsão para o erro de $\tilde{x}$ quando, em vez de b, se tem $\tilde{b}$)

$$\|\delta_x\|_\infty \leq 10^6 \|\delta_b\|_\infty$$

uma pertubação em b pode causar uma pertubação em x tão grande q.to o valor $\underbrace{10^6 \|\delta_b\|}_{\text{q.to pode ser grande!}}$

Ex: se $\|\delta b\| = 10^{-6}$

vem $\|\delta_x\|_\infty \leq 10^6 \cdot 10^{-6} = 1$

$\Rightarrow$ pode atingir 100% de erro

2º No caso particular considerado

$\|\delta_b\| = |\varepsilon|$ e também $\|\delta_x\| = |\varepsilon|$

logo, se $\|\delta_b\| = |\varepsilon|$ pequeno

também $\|\delta_x\| = |\varepsilon|$ pequeno

Mas pode ter-se outra situação ilustrada a seguir:

c) Considere-se outra perturbação de b

$A\tilde{x} = \tilde{b}$, com $\tilde{b} = [1 \quad 2\times10^{-6}]^T$

Calculemos $\|\delta_b\|_\infty$ e $\|\delta_{\tilde{x}}\|_\infty$

- $\|\delta_b\|_\infty$

$b - \tilde{b} = [0 \quad 10^{-6} - 2\times10^{-6}]^T = [0 \quad -10^{-6}]^T$

$$\left.\begin{array}{l}\|b-\tilde{b}\|_\infty = 10^{-6} \\ \text{e como } \|b\|_\infty = 1\end{array}\right] \text{Logo } \underbrace{\|\delta_b\|_\infty = 10^{-6}}_{\text{Pequeno}}$$

- $\|\delta_x\|_\infty$? Primeiro, obter $\tilde{x}$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 10^{-6} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2\times10^{-6} \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} \tilde{x}_1 = 1 \\ 10^{-6}\tilde{x}_2 = 2\times10^{-6} \Rightarrow \\ \Rightarrow \tilde{x}_2 = 2 \end{cases}$$

$$\tilde{x} = [1 \quad 2]^T$$

$$x - \tilde{x} = [1-1 \quad 1-2]^T = [0 \quad -1]^T \Rightarrow \|x-\tilde{x}\|_\infty = 1$$

$$\|\delta_x\|_\infty = \frac{\|x-\tilde{x}\|_\infty}{\|x\|_\infty} = 1 \longrightarrow 100\%$$

Neste caso o erro em $\tilde{x}$ foi de facto 100%

O sistema é mal condicionado. A ~~pelo menos~~ uma pequena mudança em b corresponde um grande erro na solução.