Métodos iterativos – III. 2

3. $\begin{cases} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 = b_1 \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 = b_2 \end{cases}$ $\quad \underbrace{a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}}_{\det A} \neq 0$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

a) Mostre que os métodos de Jacobi e G-Seidel convergem qualquer que seja aprox. inicial $x^{(0)}$ $\Leftrightarrow |m| < 1$ onde $m = \dfrac{a_{12}\, a_{21}}{a_{11}\, a_{22}}$

Vai-se usar o Teorema:

Seja $Ax = b \Leftrightarrow x = Cx + d$. O método iterativo $x^{(k+1)} = Cx^{(k)} + d$ converge para x $\forall x^{(0)} \Leftrightarrow \rho(C) < 1$

(onde $\rho(C)$ é o max $|\lambda_i(C)|$
$\hookrightarrow$ valor próprio)

Jacobi: $C_J = -D^{-1}(L+U) = -\begin{bmatrix} 1/a_{11} & 0 \\ 0 & 1/a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & a_{12} \\ a_{21} & 0 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} 0 & -\dfrac{a_{12}}{a_{11}} \\ -\dfrac{a_{21}}{a_{22}} & 0 \end{bmatrix}$$

valores próprios de C_J:

$$|C_J - \lambda I| = \begin{vmatrix} -\lambda & -\dfrac{a_{12}}{a_{11}} \\ -\dfrac{a_{21}}{a_{22}} & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - \frac{a_{12} \cdot a_{21}}{a_{22} \cdot a_{11}} = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda_{1,2} = \pm \sqrt{\frac{a_{12}\, a_{21}}{a_{22} \cdot a_{11}}} = \pm\sqrt{m}$$

$$\rho(C) = \max|\lambda_i| < 1 \Leftrightarrow |\sqrt{m}| < 1 \Leftrightarrow \sqrt{|m|} < 1 \Leftrightarrow |m| < 1$$

Gauss - Seidel

$C_{GS} = -(L+D)^{-1}U$, C_{GS} ?

é o mesmo que $(L+D)\,C_{GS} = -U$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -a_{12} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ou seja, equivale a resolver 2 sistemas:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_{11} \\ c_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} c_{11} = 0 \\ c_{21} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_{12} \\ c_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a_{12} \\ 0 \end{bmatrix} \quad \begin{cases} c_{12} = -\dfrac{a_{12}}{a_{11}} \\ c_{22} = -\dfrac{a_{21}\;a_{12}}{a_{11}\;a_{22}} \end{cases}$$

$$C_{GS} = \begin{bmatrix} 0 & \dfrac{-a_{12}}{a_{11}} \\ 0 & -\dfrac{a_{21}\;a_{12}}{a_{11}\;a_{22}} \end{bmatrix}$$

$$|C_{GS} - \lambda I| = -\lambda\left(-\frac{a_{21}\;a_{12}}{a_{11}\;a_{22}} - \lambda\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda = 0 \;\vee\; \lambda = -\frac{a_{21}\;a_{12}}{a_{11}\;a_{22}} = -m$$

$$\rho(C) = \max|\lambda_i| < 1 \Leftrightarrow |m| < 1$$

(b) Jacobi. Sabemos que a matriz A do sistema $Ax=b$ ser de diag. estrita/ domin. por linhas é equivalente a $\|C_J\|_\infty < 1$. E, nesse caso, é válida a fim. do erro

$$\|x^{(k+1)} - x^{(k)}\|_\infty \leq \frac{\|C_J\|_\infty}{1-\|C_J\|_\infty}\,\|x^{(k+1)} - x^{(k)}\|_\infty$$

onde $\|C_J\|_\infty = \max\left\{\dfrac{|a_{12}|}{|a_{11}|}, \dfrac{|a_{21}|}{|a_{22}|}\right\}$, que é o $\underline{\underline{\alpha}}$ do enunciado.

c) $\begin{cases} 3x_1 + x_2 = 8 \\ x_1 + 2x_2 = 4 \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 = (8 - x_2)/3 \\ x_2 = (4 - x_1)/2 \end{cases}$

mét Jacobi: $\begin{cases} x_1^{(k+1)} = (8 - x_2^{(k)})/3 \\ x_2^{(k+1)} = (4 - x_1^{(k)})/2 \end{cases}$

Se $x^{(0)} = [2 \quad 1]^T$

$\begin{cases} x_1^{(1)} = (8-1)/3 = 7/3 \\ x_2^{(1)} = (4-2)/2 = 1 \end{cases} \Rightarrow x^{(1)} = [7/3 \quad 1]^T$

$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ matriz do sistema é de diag. estritamente dominante por linhas e isso é $\iff \|C_J\|_\infty < 1$

Então é válida a fórm. do erro

$$\|x - x^{(1)}\|_\infty \le \frac{\alpha}{1-\alpha} \|x^{(1)} - x^{(0)}\|_\infty$$

onde $\alpha = \|C_J\|_\infty \underset{\text{por b)}}{=} \max\left\{ \left|\frac{a_{12}}{a_{11}}\right|, \left|\frac{a_{21}}{a_{22}}\right| \right\}$

$= \max\left\{ \frac{1}{3}, \frac{1}{2} \right\} = \frac{1}{2}$

Como $x^{(1)} - x^{(0)} = [7/3 - 2 \quad 1-1]^T = [1/3 \quad 0]^T$

$\Rightarrow \|x^{(1)} - x^{(0)}\|_\infty = 1/3$

Vem: $\|x - x^{(1)}\|_\infty \le \frac{1/2}{1 - 1/2} \frac{1}{3} = 1/3$

d) k? t.q. $\|x^{(k)} - x\|_\infty < 0{,}001$

Usa-se a fórm. $\|x - x^{(k)}\|_\infty \le \frac{\|C\|^k}{1 - \|C\|} \|x^{(1)} - x^{(0)}\|$

Impondo $\frac{\|C\|^k}{1 - \|C\|_\infty} \|x^{(1)} - x^{(0)}\|_\infty < 0{,}01$

$\iff \frac{(1/2)^k}{1 - 1/2} \frac{1}{3} < 0{,}001 \iff \left(\frac{1}{2}\right)^k < 0{,}0015 \iff k \log(1/2)$

$\iff k \log(1/2) < \log(0{,}0015) \Longrightarrow k \geq 10$