

## Exercício para completar a resolução

1. (a) Por aplicação do Teorema do ponto fixo, mostre que a função

$$g(x) = (x + 1 - \sin x)/2 \quad (1)$$

tem um único ponto fixo  $z \in [0, 1]$  e que a sucessão gerada por  $g$  converge para  $z$ , qualquer que seja a aproximação inicial  $x_0 \in [0, 1]$ . (Resolvido na aula teórica do dia 16 Março)

### Resolução

Se forem satisfeitas as condições do Teorema do Ponto Fixo no intervalo  $I = [0, 1]$  para a função  $g$ , então prova-se a existência dum único ponto fixo para  $g$  em  $I$  e a convergência da sucessão  $x_{m+1} = g(x_m)$  para esse ponto fixo.

i)  $g, g'$  contínuas em  $I$ ?

Tem-se  $g(x) = (1/2)(x + 1 - \sin x)$  e  $g'(x) = (1/2)(1 - \cos x)$ , que são obviamente contínuas (soma de funções contínuas em  $I$ , multiplicadas pela constante  $1/2$ ).

ii) Verifica-se  $g(I) \subset I$ ?

Ou seja, as imagens por  $g$  de qualquer  $x \in I$  pertencem a  $I$ ? Como  $g' > 0$ , resulta que  $g$  é crescente. Então, para concluir que  $g(I) \subset I$  basta verificar se as imagens dos extremos estão em  $I$ . Dado que  $g(0) = 1/2 \in I$  e  $g(1) = 0.579 \in I$  a monotonia de  $g$  permite concluir imediatamente o pretendido, ou seja, que  $g(x) \in I, \forall x \in I$ .

iii) Verifica-se  $\max_{x \in I} |g'(x)| = L, 0 < L < 1$ ?

Sendo  $g' > 0$  em  $I$ , tem-se

$$|g'(x)| = g'(x) = \frac{1 - \cos x}{2} \Rightarrow g''(x) = \frac{\sin x}{2} > 0 \quad \forall x \in I$$

Então  $g'$  é positiva e crescente em  $I$ . Logo

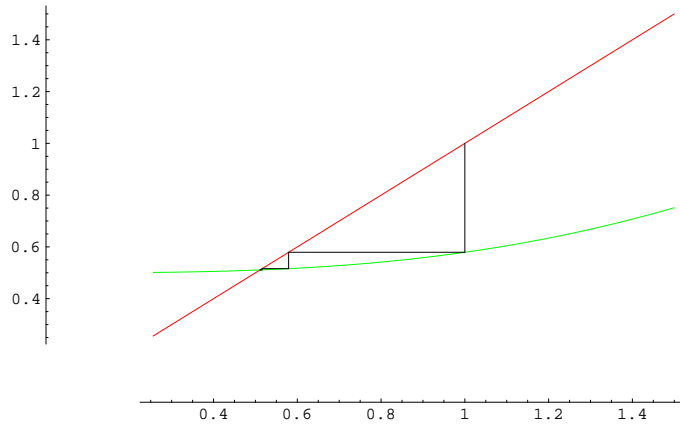
$\max_{x \in I} |g'(x)| = g'(1) = 0.2296$ . Então verifica-se iii) com  $L = 0.2296$ .

*Conclusões:* Pelo Teorema do ponto fixo, resulta:  $g$  tem um único ponto fixo em  $I = [0, 1]$  e a sucessão

$$x_{m+1} = g(x_m), \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (2)$$

converge para esse ponto fixo, qualquer que seja a aproximação inicial  $x_0$  escolhida em  $[0, 1]$ .

A figura seguinte ilustra a convergência do processo iterativo associado a  $g$  para o ponto fixo de  $g$ , começando com  $x_0 = 1$ . Assinale os pontos  $(x_1, x_1), x_2, x_2$ .



Calculando algumas iteradas com o Mathematica (comando NestList), o ponto fixo  $z$  parece estar próximo de 0.51097.

```
N[NestList[g, 1.0, 10], 16]
```

```
{1., 0.5792645075960517, 0.5159279654502127, 0.511292863508953,
 0.5109938427034604, 0.5109747331472184, 0.5109735126540478,
 0.510973434706366, 0.5109734297281932, 0.5109734294102593, 0.5109734293899544}
```

- (b) Qual a ordem de convergência do método do ponto fixo considerado? Justifique, atendendo à definição de ordem.

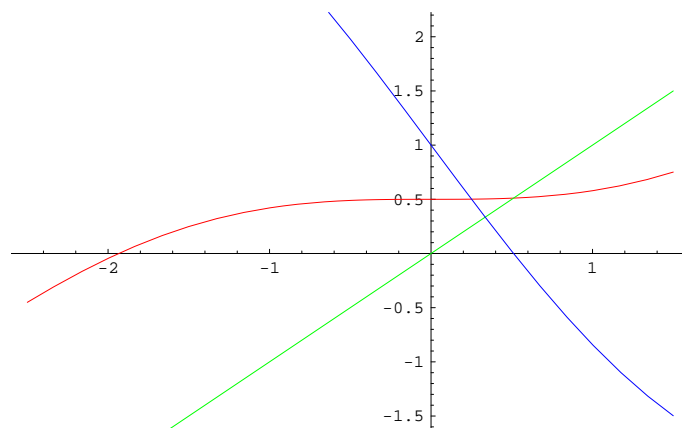
2. Considere a equação não linear

$$1 - x - \sin x = 0 \quad (3)$$

- (a) Mostre que os pontos fixos de  $g$  e as raízes de (3) coincidem. Conclua que a equação (3) tem uma única raiz  $z \in [0, 1]$ . A figura seguinte mostra os gráficos de  $f$  e de  $g$  bem como o da recta  $y = x$ . Identifique-os. Assinale o zero de  $f$  e o ponto fixo de  $g$ .

```
In[23] :=
```

```
Plot[{g[x], x, f[x]}, {x, -2.5, 1.5}, PlotStyle ->
  {RGBColor[1, 0, 0], RGBColor[0, 1, 0], RGBColor[0, 0, 1]}, AxesOrigin -> {0, 0}]
```



- (b) Pretende-se aproximar  $z$  pela sucessão (2). Tomando  $x_0 = 1$ , calcule os termos (iteradas)  $x_1, x_2$  da sucessão.
- (c) Demonstre a fórmula de erro

$$|z - x_{m+1}| \leq \frac{L}{1-L} |x_{m+1} - x_m|, \quad m \geq 0, \quad (4)$$

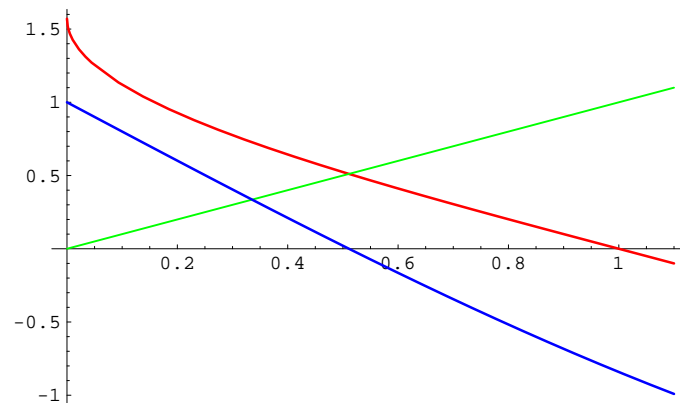
e utilize-a para obter um majorante para o erro cometido ao usar para valor aproximado da raiz  $z$  da equação (3) a iterada  $x_2$ .

- (d) Em vez de (4), utilize

$$|z - x_m| \leq L^m |z - x_0|, \quad (5)$$

em que é preciso um majorante para o erro da iterada inicial. Qual é a fórmula mais precisa?

- (e) Qual o número  $k$  de iterações que deveria efectuar de modo a garantir um erro  $|z - x_k| \leq 10^{-5}$ ? **Solução:**  $k = 8$ .
- (f) Reescreva a equação  $1 - x - \sin x = 0$  na forma equivalente  $x = \arcsin(1 - x)$ . Qual o método do ponto fixo  $x_{m+1} = g_1(x_m)$  que esta igualdade nos sugere? Pode usá-lo para aproximar  $z$ ? (SUGESTÃO: considere o intervalo  $[0.3, 0.6]$ .)  
Tem-se graficamente, usando o Mathematica:



Identifique as funções e a raiz  $z$ .