

Exercícios- Prática 1, 2009

Considere a seguinte equação não linear

$$e^{x/4} - \frac{2}{x} = 0, \quad (x > 0) \quad (1)$$

e os métodos iterativos (sucessões do ponto fixo)

$$(I) \quad x_{m+1} = 2e^{-x_m/4}, \quad (II) \quad x_{m+1} = 4 \ln(2/x_m)$$

1. Prove que a equação (1) admite uma solução única, z , no intervalo $[1.3, 1.5]$. Comece por fazer uma análise gráfica (reescrevendo a equação) e depois teórica. (Ver secção 2.1 da Sebenta e aulas).
2. Pretende-se aproximar z por um método do ponto fixo.
 - (a) Qual a função iteradora $g(x)$ associada ao método (I) ? Mostre que a raiz z da equação é ponto fixo de g .
 - (b) Recorrendo ao teorema do ponto fixo, prove que o método (I) converge para a raiz z , qualquer que seja x_0 escolhido em $[1.3, 1.5]$.
 - (c) Utilizando o mesmo método, faça $x_0 = 1.3$ e calcule as 2 primeiras iteradas x_1, x_2 . Utilizando a fórmula de erro (2.12) da Sebenta, calcule um majorante para o erro de x_2 .
 - (d) Quantas iteradas teria de calcular para obter um erro inferior a 10^{-3} ? Sugestão: utilize uma das fórmulas (2.11) ou (2.13). Qual delas é mais precisa ?
 - (e) Determine a ordem de convergência do método do ponto fixo (I), justificando (atenda à definição).
3. Seja g_1 a função iteradora associada ao método (II). Mostre que a raiz z é ponto fixo de g_1 . Contudo, prove que a sucessão gerada por g_1 (ou seja, o método (II)) não converge para a raiz z .