Trabalho de Matemática Computacional

Mestrado Integrado em Eng Biológica

Prazo de Entrega: 25 Novembro 2009

Limite de páginas para o relatório = 10.

VERSÃO 1 (2009)

Considere a equação $f(x) = 0$, com

$$f(x) = x^3 + e^{-x^2} \tag{1}$$

a) Mostre que a equação $f(x) = 0$ tem uma e uma só raiz, que designaremos por z.

b) Considere os seguintes métodos iterativos

$$(M1) \quad x_{n+1} = -e^{-x_n^2/3} \qquad\qquad (M2) \quad x_{n+1} = x_n + x_n^3 + e^{-x_n^2}.$$

i) Verifique teoricamente que um dos métodos acima converge para z, qualquer que seja x_0, e que o outro diverge.

ii) Para o método convergente da alínea anterior, determine à priori o número de iterações que garantem uma aproximação x_{n+1} com um erro inferior a 10^{-6}, supondo x_0 um real qualquer escolhido no intervalo $[-1, 0]$.

iii) Determine também a ordem de convergência do método.

c) Considere a família de métodos iterativos (do ponto fixo) com funções iteradoras

$$g_\lambda(x) = x + \lambda\left(x^3 + e^{-x^2}\right). \tag{2}$$

onde $\lambda \neq 0$ é uma constante real. Pretende-se o valor de λ tal que o método associado a g_λ seja o mais rápido possível (desde que x_0 suficientemente próximo de z). Imponha uma condição com o objectivo de obter uma expressão para λ em função de z. O método de Newton é igualmente rápido? Esta questão continua em **g)**.

Confronto com resultados computacionais

Elabore um programa que, dada uma função $g(x)$, uma aproximação inicial e um valor ϵ, permita obter aproximações, usando a sucessão gerada por g, para z, até que seja satisfeito o critério de paragem: $|x_{n+1} - x_n| < \epsilon$. Seja x_{N+1} a aproximação final que satisfaz o critério. Deve fazer sair as diferenças sucessivas, o valor N de iterações necessárias e a aproximação final x_{N+1}. Vamos usá-la para valor exacto de z nos cálculos a seguir.

d) Aplique o programa ao método convergente referido anteriormente em **b)**, com com $x_0 = 0$ e $\epsilon = 10^{-6}$.. Justifique que a aproximação obtida para z tem um erro inferior a 10^{-6}.

e) Pretende-se confirmar experimentalmente a ordem de convergência determinada teoricamente. Utilizando os resultados obtidos pelo programa, faça uma tabela mostrando os quocientes $\dfrac{|e_{m+1}|}{|e_m|^p}, n = 0, 1, \ldots, N-1$ com os valores de p : 0.5,1,1.5,2,2.5 A ideia é verificar, quando m

aumenta, qual o comportamento da sucessão (qual parece ser o limite, para cada valor de p, consoante $p > 1, p = 1, p < 1$). Diga o que esses limites indicam no que respeita à ordem de convergência. Estão de acordo com o valor teórico? Obtenha ainda uma aproximação para o coeficiente assimptótico de convergência K_∞.

(Para calcular os quocientes toma-se a aproximação final x_{N+1} como sendo z ($z = x_{N+1}$)

TABELA

m	$\frac{\lvert e_{m+1}\rvert}{\lvert e_m\rvert^{0.5}}$	$\frac{\lvert e_{m+1}\rvert}{\lvert e_m\rvert}$	$\frac{\lvert e_{m+1}\rvert}{\lvert e_m\rvert^{1.5}}$	$\frac{\lvert e_{m+1}\rvert}{\lvert e_m\rvert^{2}}$	$\frac{\lvert e_{m+1}\rvert}{\lvert e_m\rvert^{2.5}}$
0					
1					
2					
3					
4					
5					
...					
N					

f) Compare o valor aproximado do coeficiente assimptótico de convergência K_∞ obtido na alínea anterior com o valor teórico obtido a partir da função geradora (faça $z \simeq x_{N+1}$).

g) Tomando $z \simeq x_{N+1}$, calcule uma aproximação para o valor de λ a que se refere a questão **c)**. Corra o programa elaborado com a funcção g_λ correspondente a este valor de λ. Comente quanto à rapidez e ordem de convergência quando comparado com o método convergente da questão **b)**.