Trabalho de Matemática Computacional

Mestrado Integrado em Eng Biológica

Prazo de Entrega: 25 Novembro 2009

Limite de páginas para o relatório = 10.

VERSÃO 2 (2009)

Considere o segmento S com extremos $P(2,24)$ e $Q(5,51)$ e a curva $C = \{(t,t^3), t \in \mathbf{R}\}$.

a) Mostre que C intersecta S num único ponto, que designamos por (z, z^3), que verifica uma certa equação $f(x) = 0$. Pretende-se aproximar a raiz z dessa equação pertencente ao intervalo $[2,5]$.

b) Considere os métodos iterativos do ponto fixo com funções iteradoras

$$(M1) \quad g_1(x) = \sqrt{9 + \frac{6}{x}} \qquad (M2) \quad g_2(x) = \frac{6 + 2x^3}{-9 + 3x^2}$$

i) Justifique que g_2 é a função iteradora do método de Newton para a função f referida acima. Mostre que os dois métodos referidos convergem para z, qualquer que seja a iterada inicial $x_0 \geq 2$, e determine as respectivas ordens de convergência.

ii) Para o método associado a g_1, determine *à priori* o número de iterações que garantem uma aproximação x_{n+1} com um erro absoluto inferior a 10^{-6}, supondo que $x_0 \in [2,5]$.

c) Mostre, teoricamente, que não pode utilizar um método baseado na função iteradora g_3 para aproximar z:

$$g_3(x) = \frac{9x + 6}{x^2}.$$

d) Considere os métodos da forma

$$x_{n+1} = x_n + \lambda(x_n^3 - 9x_n - 6) \tag{1}$$

onde λ é uma constante real diferente de zero. Pretende-se o valor de λ tal que o método correspondente convirja o mais rápido possível (desde que x_0 suficientemente próximo de z). Imponha uma condição de modo a obter uma expressão para λ em função de z.

Confronto com resultados computacionais

Elabore um programa que, dada uma função $g(x)$, uma aproximação inicial e um valor ϵ, permita obter aproximações, usando a sucessão gerada por g, para z, até que seja satisfeito o critério de paragem: $|x_{n+1} - x_n| < \epsilon$. Seja x_{N+1} a aproximação final que satisfaz o critério. Deve fazer sair as diferenças sucessivas, o valor N de iterações necessárias e a aproximação final x_{N+1}. Vamos usá-la para valor exacto de z nos cálculos a seguir.

e) Utilizando os métodos estudados atrás, calcule aproximações para z com $\epsilon = 10^{-6}$, considerando as aproximaçãoes iniciais $x_0 = 2$ e $x_0 = 5$.

i) Compare os resultados dos 2 métodos convergentes quanto ao número de iterações realmente necessárias para atingir a precisão requerida.

ii) Pretende-se confirmar experimentalmente as ordens de convergência determinadas teoricamente para os 2 métodos. Utilizando os resultados obtidos pelo programa, faça uma tabela para cada m étodo, mostrando os quocientes $\dfrac{|e_{m+1}|}{|e_m|^p}, n = 0, 1, \ldots, N-1$ com os valores de p : 0.5,1,1.5,2,2.5

A ideia é verificar, quando m aumenta, qual o comportamento da sucessão (qual parece ser o limite, para cada valor de p, consoante $p > 1, p = 1, p < 1$). Diga o que esses limites indicam no que respeita à ordem de convergência. Estão de acordo com o valor teórico? (No cálculo dos quocientes, tome z como sendo a aproximação final x_{N+1}).

iii) Obtenha ainda uma aproximação para o coeficiente assimptótico de convergência K_∞ de cada método. Compare com os valores teóricos (que podem ser obtidos a partir da função iteradora do método)

f) Corra o programa com g dada pela função g_3 e várias escolhas de x_0. Comente os resultados (em concordância com a teoria?).

TABELA

m	$\frac{\lvert e_{m+1}\rvert}{\lvert e_m\rvert^{0.5}}$	$\frac{\lvert e_{m+1}\rvert}{\lvert e_m\rvert}$	$\frac{\lvert e_{m+1}\rvert}{\lvert e_m\rvert^{1.5}}$	$\frac{\lvert e_{m+1}\rvert}{\lvert e_m\rvert^{2}}$	$\frac{\lvert e_{m+1}\rvert}{\lvert e_m\rvert^{2.5}}$
0					
1					
2					
3					
4					
5					
...					
N					